Х. ГЮЙГЕНС

ТРИ МЕМУАРА ПО МЕХАНИКЕ

ТРИ МЕМУАРА ПО МЕХАНИКЕ

Х. ГЮЙГЕНС

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

КЛАССИКИ НАУКИ

Х. ГЮЙГЕНС

ТРИ МЕМУАРА ПО МЕХАНИКЕ

ПЕРЕВОД,
РЕДАКЦИЯ И ПРИМЕЧАНИЯ
ПРОФЕССОРА
К. К. БАУМГАРТА

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
1951

Под общей редакцией Комиссии Академии Наук СССР
по изданию научно-популярной литературы
и серии „Итоги и проблемы современной науки“
Председатель Комиссии Академии Наук СССР
академик *С. И. ВАВИЛОВ*
Зам. председателя член-корреспондент
Академии Наук СССР *П. Ф. ЮДИН*


ТРИ МЕМУАРА ПО МЕХАНИКЕ
Х. ГЮЙГЕНС

МАЯТНИКОВЫЕ ЧАСЫ[1]

Прошло 15 лет [2] с тех пор, как я опубликовал в брошюре изобретенные мною в то время часы.

Но так как я сделал с того времени много усовершенствований в своей работе, то решил изложить их в новой книге. Эти усовершенствования следует признать главнейшей частью изобретения и его теоретическим обоснованием, которого до сих пор не было. Простой маятник нельзя считать надежным и равномерным измерителем времени, так как время его колебания зависит от размаха: большие размахи требуют большего времени, чем малые.

Однако при помощи геометрии я нашел новый, до сих пор неизвестный, способ подвешивания маятников. Я исследовал кривизну некоторой кривой, которая удивительным образом подходит для обеспечения равенства времени качания маятника. После того как я заставил маятник часов колебаться по этой кривой, ход часов стал чрезвычайно правильным и надежным, как показали испытания на суше и на море. Великая польза этих часов для астрономии и мореплавания может считаться установленной. Эта кривая — та, которую описывает в воздухе гвоздь, вбитый в обод колеса, при качении колеса. Математики нашего времени называют ее циклоидой; из-за разных других ее свойств она исследовалась многими, а мною — в виду ее пригодности для измерения времени, которую я обнаружил, исследуя ее по строгим методам науки и не подозревая ее применимости. Я уже давно сообщил о своем открытии некоторым друзьям, сведущим в этой области (я сделал это открытие вскоре после напечатания первого издания „Часов"). Теперь я снабдил его возможно более точными доказательствами и предаю его гласности. Эти доказательства я считаю главнейшей частью книги.

Для проведения этих доказательств потребовалось укрепить и, где нужно, дополнить учение великого Галилея о падении тел. Наиболее желательным плодом, как бы величайшей вершиной этого учения, и является открытое мною свойство циклоиды.

Для применения моего изобретения к маятникам мне необходимо было установить новую теорию, а именно, теорию образования новых линий при посредстве развертывания кривых линий. Здесь я столкнулся с задачей сравнения длины кривых и прямых линий. Я изучил этот вопрос несколько далее, чем нужно было для моей цели, так как теория показалась мне изящной и новой.[3]

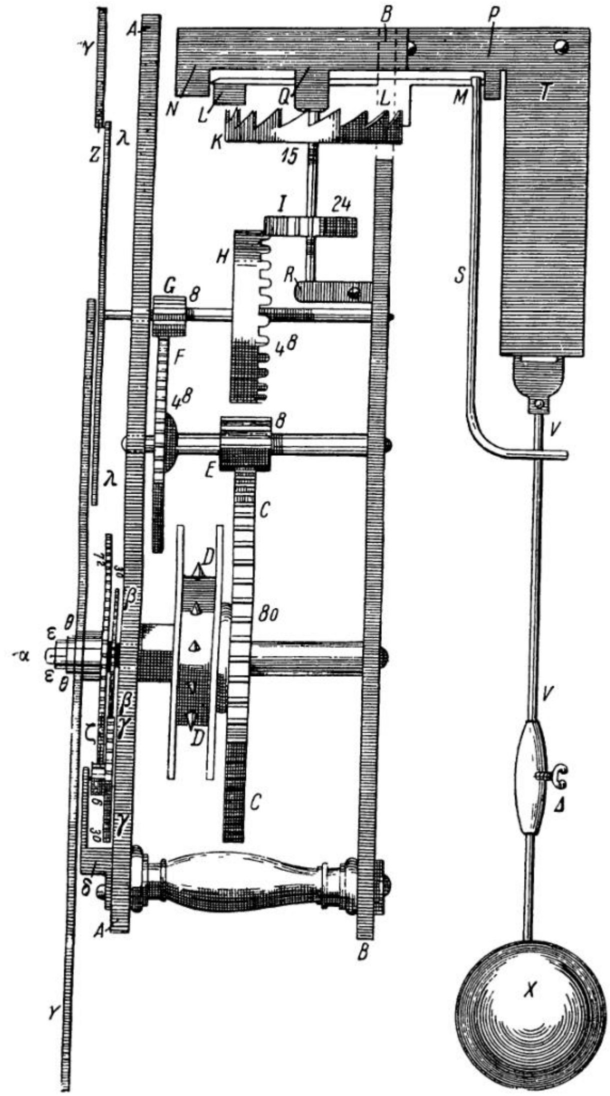
Я показываю полезность применения в часах сложного маятника. Для изучения его природы я должен был произвести исследование о центре качания, исследование, которое уже было предпринято несколькими учеными, но пока без особого успеха. Я здесь доказал ряд теорем относительно линий, площадей и тел, которые заслуживают, как мне кажется, внимания. Но всему этому я предпосылаю описание механического устройства часов и применения маятника в форме, оказавшейся наиболее удобной для астрономических целей. Легко по этому образцу строить часы для других целей, введя необходимые изменения. Выдающийся успех изобретения привел к тому, что обычно происходит и что я и предвидел; теперь несколько лиц желают быть изобретателями или же претендуют на эту честь не для себя, но все-таки лучше для одного из своих соотечественников, нежели для меня.

Я считаю необходимым выступить, наконец, здесь против этих несправедливых притязаний. Для этой цели мне совершенно достаточно подтвердить, что 16 лет тому назад я сам придумал конструкцию часов и изготовил часы. В то время никто ни устно, ни в печати не упоминал о подобных часах, и слухов никаких не было (я говорю о применении простого маятника к часам. Относительно циклоиды никто, я полагаю, не станет возбуждать спора). В следующем году (пятьдесят восьмом этого столетия) я опубликовал рисунок и описание часов и разослал в разных направлениях как экземпляры часов, так и брошюру. Эти факты столь общеизвестны, что не нуждаются ни в свидетельстве ученых, ни в официальных актах Генеральных Штатов Голландии, которые я мог бы получить.

Отсюда видно, что надо думать о тех, которые 7 лет спустя публикуют совсем то же устройство часов в своих книгах [4] как свое собственное изобретение или изобретение своих друзей. Некоторые утверждают, что Галилей пытался сделать это изобретение, но не довел дела до конца; эти лица скорее уменьшают славу Галилея, чем мою, так как выходит, что я с бо́льшим успехом, чем он, выполнил ту же задачу. Если же утверждать, как это сделал недавно один ученый,[5] что дело было доведено до конца или Галилеем или его сыном и что часы этого рода были сделаны и демонстрированы, то кто может поверить таким утверждениям? Крайне невероятно, чтобы такое полезное изобретение могло оставаться в неизвестности 8 лет, пока я не извлек его на свет божий. Если они утверждают, что изобретение нарочно держали в тайне, то они должны признать, что такой довод может привести каждый, кто хочет приписать себе изобретение. Это еще требует доказательства и даже после доказательства не имело бы ко мне никакого отношения, если бы одновременно не было бы доказано, что то, что было неизвестно никому, стало известно одному мне. Это я должен был сказать в свою защиту. Теперь перейдем к описанию часов.

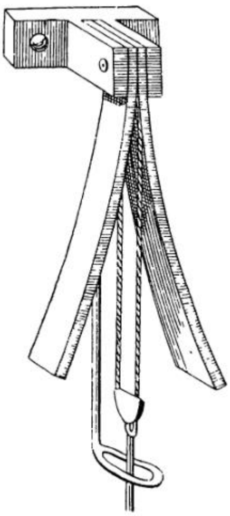
ПЕРВАЯ ЧАСТЬ „МАЯТНИКОВЫХ ЧАСОВ“, содержащая описание часов

Приложенный рисунок (фиг. 1) представляет вид часов сбоку. На рисунке видны, прежде всего, две пластины *AA* и *BB* длиною в полфута, а шириною два с половиной дюйма. Углы пластин скреплены четырьмя колонками таким образом, что расстояние пластин друг от друга составляет полтора дюйма. В этих пластинах лежат оси главных зубчатых колес. Первое и нижнее из этих колес имеет 80 зубцов. На его ось насажен шкивок *D*, снабженный железными остриями, чтобы удерживать шнур с грузом, устройство которого будет указано далее. Итак, силой груза вертится колесо *C* и приводит во вращение следующее колесо *E*. Это колесо имеет 8 зубцов и общую ось с колесом *F*, у которого 48 зубцов. Последнее колесо сцеплено с колесом *G* и одновременно приводит во вращение колесо *H*, сидящее на той же оси, что и *G*. Число зубцов у *G* и *H* то же, что и у *E* и *F*. Колесо *H* принадлежит к колесам, называемым нашими мастерами „коронными“. Его зубья вертят трибку *I* и колесо *K*. Трибка *I* имеет 24 зубца, колесо *K* — 15 зубцов. Зубцы *K* вырезаны как зубья пилы. Над колесом *K* лежит поперек ось *LM*, закрепленная в подшипниках *N* и *P*, прикрепленных к пластинке *BB*. У пластинки *NP* имеется направленный вниз выступ *Q*. Через него пропущена ось *LM*, и он же поддерживает верхний конец оси колес *K* и *I*. Нижний конец оси опирается на *R*. В пластинке *B* сделан широ-



Фиг. 1.

кий вырез. Через него проходит ось LM, заостренный конец которой опирается на цапфу P таким образом, что ее движения свободнее, чем если бы она опиралась прямо на B. Кроме того, ось должна заходить за B для того, чтобы можно было к ней прикрепить вилку S, которая должна двигаться вместе с нею. Это движение колебательное, то в одну, то в другую сторону, так как зубцы колеса K поочередно ударяются о пластины LL всем известным образом, не нуждающимся в более подробном объяснении.



Фиг. 2.

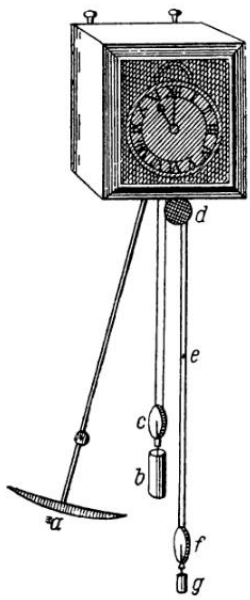
Вилка S в своей нижней части отогнута в сторону и снабжена продольной щелью. Через щель продет железный стержень маятника V, к которому прикреплен свинцовый груз X. Этот стержень подвешен на двух нитях между двумя щеками, из которых на фигуре видна лишь одна T. Поэтому рядом помещена вторая фигура, на которой показаны форма щек, их изгиб и весь способ подвеса маятника (фиг. 2). Впрочем, об истиной кривизне щек нам придется еще подробно говорить в дальнейшем.

Перейдем теперь к ходу часов. Остальные части фигур мы еще объясним в дальнейшем. Прежде всего ясно, что, с одной стороны, движение маятника VX будет поддерживаться силой колес, увлекаемых грузом, если только вначале привести маятник в движение рукой, и что, с другой стороны, установившиеся колебания маятника определят для всех колес, а следовательно и для часов вообще, закон и норму движения.

Именно вилка, как бы слабо на нее ни действовали колеса, не только следует за маятником, но и поддерживает колебания последнего при каждом качании, сообщая ему постоянное движение. Без этого качания сами собой, или, вернее, вследствие сопротивления воздуха, постепенно затухали бы и, наконец, прекратились бы. С другой стороны, маятник обладает тем свойством, что он имеет всегда тот же ход, если только не меняется его длина; поэтому (по крайней мере при применении нашего способа подвеса маятника, обеспечивающего строгую равномерность хода) колесо K не может вращаться то скорее, то медленнее, как это имеет место в простых часах; здесь отдельные зубцы вынуждены продвигаться всегда в равные промежутки времени. Отсюда следует, что и остальные колеса и, наконец, стрелки часов вращаются равномерно, так как движения всех колес определенным образом связаны между собой. Поэтому не надо опасаться неравномерности хода или запаздывания даже тогда, когда что-нибудь не в порядке в часах, или же оси хуже вращаются, вследствие температурных изменений, лишь бы только порча не была так значительна, что часы остановятся. Часы всегда показывают верное время, или они его не показывают вовсе.

Стрелки часов движутся и расположены следующим образом. Параллельно пластинкам AA и BB и на расстоянии четверти дюйма от AA расположена пластинка YY. На ней нарисованы круги циферблата с центром в α — продолжении оси колеса C. Из этих кругов внутренний разделен на 12 часов, наружный — на 60 минут. На оси колеса C, за пластинкой AA, сидит колесо β, снабженное трубкой, проходящей через пластинку YY и доходящей до ε. Колесо β так насажено на ось колеса C, что вращается вместе с нею, но может быть в случае надобности повернуто и независимо от нее. Около ε прикреплена стрелка, делающая один оборот в час, т. е. показывающая минуты, или шестидесятые доли часа. Колесо β приводит в движение другое колесо γ, с тем же числом зубцов и одновременно связанную с γ трибку, с 6 зубцами. Общая ось колеса γ и трибки с одной стороны покоится в пластине AA, с другой — в цапфе δ. Последняя трибка приводит в действие колесо ζ

с 72 зубцами и вместе с тем трибку, связанную с колесом ζ. Эта трибка также проходит через Y и доходит до A, т. е. она несколько короче трубки, связанной с колесом β, и охватывает последнюю.



Фиг. 3.

К A прикрепляется часовая стрелка, более короткая, чем минутная, так как она должна описывать внутренний круг. Для того чтобы отсчитывать также и секунды, сделано следующее. Ось колеса H продолжена до пластинки Y и на нее насажен диск λ, на котором нарисован круг с 60 делениями. В пластинке Y имеется отверстие около Z с прикрепленной наверху иглой, служащей для отсчета проходящих мимо делений. Все расположение стрелок и циферблатов можно лучше понять из маленького рисунка (фиг. 3), показывающего внешний вид часов.

При указанном выше расположении зубчатых колес необходимо взять маятник такой длины, чтобы он совершал простое колебание в одну секунду,[6] т. е. он должен иметь длину 3 фута. Так как было неудобно изобразить такую длину на рисунке, я дал маятнику длину в одну пятую этой величины, считая от точки подвеса, где начинается изгиб щек и до центра груза X. Когда я говорю 3 фута, то не имею в виду меру фута, принятую у того или иного европейского народа, но точную и неизменную меру, которую можно определить из самой длины секундного маятника. Я бы хотел ее назвать „часовым футом“. К этому футу следовало бы относить все остальные футы, длину которых мы хотели бы сохранить для потомства.[7] Ибо будут знать на веки вечные длину парижского фута, если только будет установлено, что его отношение к часовому футу есть 864 : 881.[8] Мы еще будем говорить подробно о точном определении этих соотношений в главах, посвященных центру качания.

Теперь нам необходимо установить продолжительность обращения отдельных колес и стрелок, чтобы показать, что указанные выше числа зубцов точно соответствуют поставленной задаче.

Очевидно, при каждом одном обороте колеса C колесо F делает 10 оборотов, колесо H — 60 оборотов и верхнее колесо K — 120 оборотов. Так как это колесо имеет 15 зубьев, о которые поочередно ударяются пластины LL, то при каждом обороте колеса K происходит 30 ударов, которым соответствуют столько же отклонений маятника в ту и другую сторону. Следовательно, 120 оборотам колеса K соответствуют 3600 простых колебаний, т. е. столько, сколько в одном часе секунд. Итак, колесо C делает один оборот в час и вместе с колесом и прикрепленная в ε минутная стрелка. В то же время совершит один оборот колесо β и, следовательно, соединенное с ним колесо γ, имеющее 6 зубцов. Так как колесо ζ имеет зубцов в 12 раз больше, то оно, а также соединенная с ним часовая стрелка, совершит один оборот в 12 часов. Наконец, мы показали, что каждому обороту колеса C соответствуют 60 оборотов колеса H и соединенного с ним круга λ. Следовательно, H и λ совершают один оборот в минуту, и шестидесятые доли круга, проходя мимо иглы, позволят отсчитывать секунды. Следовательно, все устроено правильно. Груз X внизу маятника весит 3 фунта и сделан из свинца или из свинца, покрытого бронзой. При этом важна не только тяжесть металла, но очень важна и форма, чтобы маятник испытывал по возможности малое сопротивление от воздуха. Грузу придают форму удлиненного лежащего цилиндра, заостренного с концов, как показано на фиг. 3 при a. Для корабельных часов более подходящей оказалась форма стоящей чечевицы.

Та же фиг. 3 показывает способ подвеса другого груза, b, который поддерживает часы в движении. Этот способ подвеса, до сих пор неизвестный, я должен был изобрести, чтобы ход часов не прерывался или не затруднялся при их заводе, то есть при поднятии груза b. Этого можно было опасаться, и этого надо было во всяком случае избежать. С этой целью был применен шнур, замкнутый на себя, концы которого были аккуратно сплетены между собой. Этот шнур прежде всего накладывался на шкив, соединенный с нижним зубчатым колесом C и обозначенный на фиг. 1 через D; далее шнур пропускался через подвижной блок c, на котором висит груз b. Отсюда шнур идет на неподвижный блок d, укреплённый снаружи ящика часов. Блок d снабжен железными остриями и, кроме того, пилообразными зубьями, позволяющими колесу d вращаться, если тянуть за шнур e, но не допускающими вращения в другую сторону. От блока d шнур идет к подвижному блоку f, к которому прикреплен противовес g, небольшой, но достаточный для того, чтобы груз b мог опускаться только вращая шкивок D, ибо шнур, пропущенный через C, затем снова возвращается к шкиву D. При таком устройстве груз b поддерживает движение часового механизма половиной своего веса и не прекращает этого и в то время, когда груз b подымается вверх рукой, тянущей за e. Таким образом, ход часов никогда не прерывается и не замедляется.

Величину веса b нельзя определить заранее. Чем лучше и точнее сделан часовой механизм, тем меньше будет вес b. В лучших часах, нами до сих пор сделанных, этот вес не превышал 6 фунтов. При этом диаметр шкива D был около 1 дюйма, груз маятника 3 фунта и длина маятника — столько же фут. Укажем также, что длинный стержень маятника пропускается через узкое отверстие в дне ящика часов. Отверстие должно быть достаточных размеров, чтобы не препятствовать качаниям маятника. Будучи подвешены на высоте человеческого роста, часы идут 30 часов.

Остается только описать форму щек T, между которыми, как мы сказали, подвешен маятник и которые делают период колебаний маятника постоянным. Без этих щек простые колебания маятника не будут строго изохронными, но колебаниям с меньшим размахом будет соответствовать и меньший период (хотя некоторые ученые и думают иначе). Справедливость нашего положения легко, прежде всего, показать на опыте. Если взять два маятника одинаковой длины с одинаковыми грузами, отвести один маятник далеко от положения равновесия, а другой лишь очень немного и отпустить их в одно и то же мгновение, то маятники недолго будут двигаться в ту же сторону, но маятник, совершающий малые колебания, опередит другой маятник.

С другой стороны, можно вычислить отношение периодов при разных дугах размаха, на основании строгих принципов и с любой точностью. Можно, например, показать, что время, в течение которого маятник проходит четверть окружности, относится ко времени падения по очень малой дуге,[9] как 34 : 29. Это различие периодов колебаний ни в коем случае не объясняется сопротивлением воздуха, как думают некоторые,[10] но вытекает из самой природы движения и свойств круга. К этому выводу приводит и устройство изохронного маятника, который в своем движении значительно удаляется от дуги круга, как мы вскоре увидим. Можно было бы подумать, что различие периодов, которое мы только что рассматривали, не имеет никакого значения для наших часов, в которых поддерживается постоянство размаха маятника, и что, следовательно, нет надобности в каком-либо усовершенствовании часов. Это было бы верно, если бы все размахи оставались бы строго равными. Но так как маятник совершает от времени до времени немного меньшие или бо́льшие колебания, то из этих малых отступлений, в конце концов, образуется заметная ошибка; что это действительно так, можно проверить рассуждением и опытом.

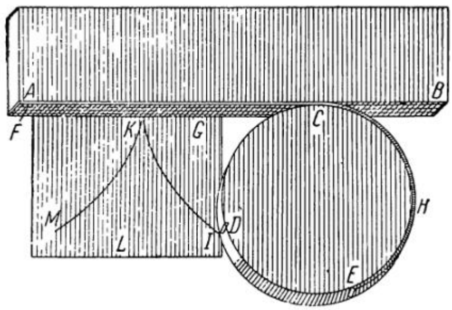
На самом деле, хотя сила, оказываемая грузом b на первое зубчатое колесо, всегда одна и та же, сила, оказываемая на маятник, передающаяся через ряд колес, не столь постоянна, как бы тщательно ни был сконструирован механизм.

Кроме того, колеса вертятся труднее, когда становится холоднее или когда масло, употребленное для смазки, испарится или загрязнится. Особенно непостоянны будут размахи корабельных часов вследствие непрерывной качки. Таким образом, и все часы, и в особенности часы на судах, нуждаются в средстве, поддерживающем постоянство периодов их маятников при больших и малых качаниях.[11]

Для определения формы щек, дающей колебаниям изохронность, надо сначала определить длину маятника, что легко сделать по теореме пропорциональности длины маятника квадрату периода колебания. Маятник, отбивающий секунды, имеет длину 3 фута, следовательно, маятник, отбивающий полсекунды, должен быть в четыре раза короче, т. е. иметь длину 9 дюймов.

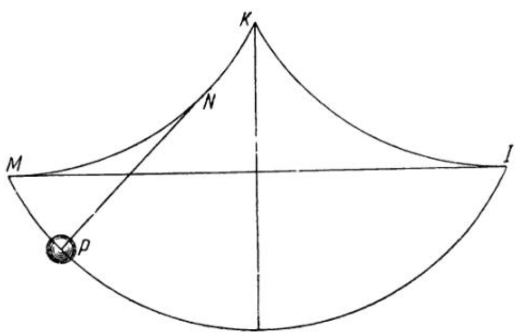
Если ищется длина маятника, делающего 10 000 колебаний в час, то расчет производится следующим образом. Мы знаем, что маятник длиною в 3 фута делает 3600 колебаний в час; следовательно, его период больше, чем период искомого маятника в отношении 10 000 к 3600, или 25 к 9. Следовательно длина трехфутового маятника относится к длине искомого, как квадрат 25 к квадрату 9, т. е. как 625 к 81. Отсюда искомая длина маятника равна 4.66 дюйма.

Зная длину маятника, например 3 фута в наших часах, находят циклоиду, определяющую кривизну щек T следующим образом (фиг. 4). К плоской доске прикрепляют брусок AB толщиной $^1/_2$ дюйма. Вытачивают цилиндр той же высоты с диаметром основания, равным половине длины маятника. $FGCHE$ — тонкая жестяная полоска или лента, прикрепленная концом F к бруску, а другим концом к произвольному месту E окружности цилиндра таким образом, что полоска частью обвита вокруг окружности, частью натянута вдоль бруска. В цилиндр, кроме того, вбит гвоздь DI так, чтобы его острие чуть выступало из нижней поверхности цилиндра, а сам гвоздь точно совпадал бы с окружностью цилиндра. При таком устройстве острие I опишет на гладкой доске кривую линию KI, называемую циклоидой, если катить цилиндр вдоль линии AB, от которой он отделен только тонкой лентой FG, и если при этом все время натягивать ленту. Основание цилиндра CDE будет образующим кругом циклоиды.



Фиг. 4.

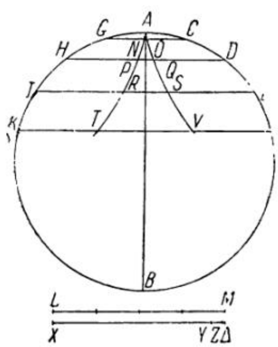
Прочертив линию KI, повернем доску KL обратной стороной и начертим на обратной стороне от той же точки K симметричную ветвь циклоиды KM. Вырежем потом фигуры MKI



Фиг. 5.

точно по данным кривым. Такую кривизну надо придать щекам, между которыми подвешен маятник. Для часов достаточно небольших дуг KM и KI, остальная часть дуги будет бесполезна, так как нить маятника не может ее достигнуть.

Для того чтобы яснее осознать удивительную природу и действие кривой, я на следующем рисунке вычертил полностью полуциклоиды KM и KI (фиг. 5). Между ними подвешен маятник, длина которого составляет два диаметра производящего круга. Этот маятник может совершать какие угодно размахи, хотя бы самые большие из возможных по дуге MPI. Продолжительность качания будет одна и та же. И при этом центр подвешенного шара P всегда будет находиться на кривой MPI, которая сама есть циклоида. Я не знаю, обладают ли и другие кривые линии тем же замечательным свойством, что их разверткой является та же самая кривая линия.[12] Все, что здесь сказано о циклоиде, будет подробно доказано в дальнейшем, когда мы будем разбирать вопросы о падении весомых тел и о развертке кривых.



Фиг. 6.

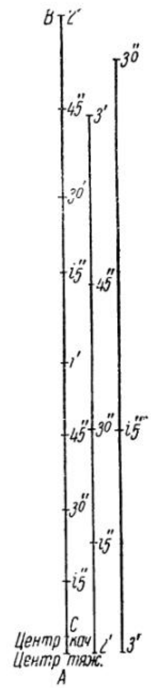
Теперь я хочу построить циклоиду другим способом, по точкам. Описываем окружность с диаметром, равным половине длины маятника (фиг. 6). На его окружности наносят n равных частей, где n — любое целое число. Назовем эти части AC, CD, DE, EF, AG, GH, HI, IK; проводим хорды GC, HD, IE, KF, параллельные между собой. Затем рисуют прямую LM, по длине равную дуге AF, эту прямую делят на столько же равных частей, сколько их в дуге AF. Затем на прямой CG от C и от G откладывают линии CN и GO, равные одной n-й части LM; на прямой DH откладывают линии DP и HQ, равные $\frac{2}{n}$ от LM; на прямой EI откладывают линии, равные $\frac{3}{n}$ от LM, и т. д. Наконец, на последней прямой FK откладывают линии KV и TF, равные линии LM. Кривые $ANPRT$ и $AOQSV$ будут ветви циклоиды, которую мы ищем.[13]

Чтобы найти прямую LM, равную по длине дуге AF, поступаем следующим образом. Откладываем прямую XY, равную хорде, соответствующей дуге AF; затем от той же точки откладываем XZ — прямую, равную длине двух хорд, соответствующих $^1/_2$ дуги AF. Наконец, надо удлинить XZ на $ZD = \frac{1}{3}\ YZ$. Тогда длина $X\Delta$ будет почти равна длине дуги AF, а именно, если $AF = {}^1/_6$ окружности (а больше она никогда не будет), то $X\Delta$ будет отличаться от длины дуги AF меньше чем на $\frac{1}{6000}$ своей длины, как доказано в нашем мемуаре о величине круга.[14]

Изложив все, касающееся конструкции часов, перейдем к указаниям, как их юстировать для точного измерения времени. Прежде всего надо следующим образом проверить, правилен ли ход. Для глаза наблюдателя выбирается определенное место, откуда видны звезды и вместе с тем крыши или стены соседних домов, расположенные таким образом, чтобы звезда (из числа неподвижных), дойдя до предмета, мгновенно исчезала. У этого места помещается диафрагма, величиною со зрачок, чтобы быть уверенным в том, что в последующие ночи при каждом наблюдении глаз находился точно на том же месте и в том же положении. Записывают момент исчезания определенной звезды за домом или крышей и повторяют это же наблюдение в следующий день или лучше через несколько дней. Если между наблюдениями проходит 1 день, то время, указанное часами при втором наблюдении, должно быть на 3 мин. 56 сек. раньше, чем при первом наблюдении. Тогда маятник имеет правильную длину, так как именно на 3 мин. 56 сек. время обращения неподвижных звезд короче средних солнечных суток. „Средних“ потому, что солнечные сутки, считая от полудня до полудня, не все равны между собой, что будет подробнее объяснено дальше. Если наблюдение делается через несколько дней, то надо разность показаний привести к 1 дню. Например, если два наблюдения через 7 дней дали для момента исчезновения определенной звезды 9 ч. 30 мин. 18 сек. и 8 ч. 50 мин. 24 сек., то надо разность 39 мин. 54 сек. разделить на 7. Это дает 5 мин. 2 сек. вместо 3 мин. 55 сек., т. е. на 1 мин. 46 сек. больше, чем следует. Следовательно, маятниковые часы отстают в течение суток на 1 мин. 46 сек. относительно „средних“ суток.

Можно и другим способом сравнивать ход часов с движением солнца. Но тогда надо принимать во внимание неравенство солнечных суток. Не все дни между собой равны. Хотя разность дней и не велика, но она накопляется от суток к суткам и может в течение нескольких дней достичь величины, которой отнюдь нельзя пренебречь. Имея совершенные солнечные часы и совершенно правильные маятниковые часы, показывающие истинную меру дня, мы все-таки заметим, что показания обоих часов в определенные эпохи года могут разниться на $^1/_4$ часа и даже на $^1/_2$ часа, тогда как в другие времена года они опять вполне совпадут. Что это так, можно понять из прилагаемой таблицы уравнения времени,[15] но необходимо сначала показать, как ею пользоваться. Берут по таблице уравнение времени для того дня, когда маятниковые часы были поставлены по солнечным, и для того дня, в который хотят установить, насколько правилен ход часов. Если первое уравнение времени больше второго, то маятниковые часы должны опережать солнечные на разность обоих уравнений. Наоборот, если второе уравнение больше первого, то избыток будет на стороне солнечных часов, которые уйдут вперед. Пусть, например, показания солнечных и маятниковых часов 5 марта вполне совпадают. Уравнение времени в этот день 3 мин. 11 сек. Пусть 20 марта желают установить, правильно ли ходят часы. Для уравнения времени в этот день находим 7 мин. 27 сек. Так как это уравнение времени на 4 мин. 16 сек. больше первого, то солнечные часы должны опережать маятниковые на 4 мин. 16 сек.

Если результат опыта другой, то легко заключить, насколько маятниковые часы отстают или бегут вперед. Для вычисления этой таблицы послужили мне два обстоятельства, известные астрономам: наклон эклиптики и переменная скорость движения солнца при движении по эклиптике. Это следует из теории и подтверждается опытом при помощи часов, без которых опыт был бы невозможен. Мы часто наблюдали ежедневно по нескольку месяцев подряд солнце при прохождении через меридиан и всегда находили наблюдение в полном согласии с вычисленной величиной уравнения времени.



Фиг. 7.

Если по одному из этих методов (лучше по первому) проверены часы и оказалось, что их показание заметно (более чем на 3 или 4 минуты) отличается от средней длины дня, то надо укоротить или удлинить маятник для исправления ошибки. При этом соблюдают следующее правило. Необходимо укоротить или удлинить маятник на $^{7}/_{10}$ линии на каждую минуту отставания или опережения в сутки. Если часы таким образом приблизительно отрегулированы, то окончательную регулировку производят так (см. фиг. 1). Перемещают маленький груз Δ, висящий на стержне VV. Этот груз имеет форму чечевицы, как видно из фиг. 1, представляющей осевое сечение. Так как этот груз составляет только $^{1}/_{20}$—$^{1}/_{30}$ груза маятника X, то можно его перемещать на значительные величины без существенного изменения хода часов. Маятник будет колебаться всего скорее, когда груз Δ будет на середине стержня, и замедляться при перемещении груза Δ от середины вверх или вниз. Для того чтобы не задумываться над тем, что надо делать с грузом Δ, чтобы получить наилучшую меру времени, мы подразделили нижнюю часть стержня по определенной системе, которая следует из теории движения маятника; при этом мы предположим, что груз Δ одинакового веса со стержнем

Таблица ура

Число месяца	Январь		Февраль		Март		Апрель		Май		Июнь	
	мин.	сек.	мин.	сек.	мин.	сек.	мин.	сек.	мин.	сек.	мин.	сек.
1	10	40	0	32	2	15	11	18	18	32	18	10
2	10	10	0	24	2	28	11	37	18	39	18	1
3	9	41	0	18	2	42	11	56	18	46	17	51
4	9	13	0	13	2	56	12	15	18	53	17	41
5	8	45	0	9	3	11	12	34	18	59	17	30
6	8	17	0	6	3	26	12	53	19	4	17	19
7	7	50	0	3	3	41	13	12	19	9	17	8
8	7	22	0	1	3	56	13	31	19	14	16	57
9	6	58	0	0	4	12	13	49	19	18	16	46
10	6	34	0	0	4	29	14	6	19	22	16	35
11	6	10	0	0	4	46	14	23	19	25	16	24
12	5	47	0	2	5	4	14	39	19	28	16	13
13	5	24	0	4	5	22	14	55	19	29	16	1
14	5	2	0	8	5	40	15	10	19	29	15	49
15	4	41	0	12	5	58	15	25	19	29	15	37
16	4	21	0	16	6	16	15	39	19	28	15	24
17	4	2	0	21	6	33	15	53	19	26	15	11
18	3	44	0	26	6	51	16	7	19	24	14	58
19	3	27	0	32	7	9	16	21	19	21	14	45
20	3	11	0	40	7	27	16	34	19	18	14	32
21	2	55	0	48	7	45	16	47	19	15	14	9
22	2	39	0	57	8	3	16	59	19	11	14	6
23	2	23	1	6	8	22	17	11	19	7	13	53
24	2	7	1	16	8	41	17	22	19	2	13	40
25	1	52	1	26	9	1	17	33	18	57	13	27
26	1	38	1	37	9	21	17	43	18	51	13	15
27	1	25	1	49	9	41	17	53	18	45	13	3
28	1	13	2	2	10	1	18	3	18	39	12	52
29	1	2			10	21	18	13	18	33	12	41
30	0	51			10	40	18	23	18	26	12	30
31	0	41	24		10	59			18	18		

внения дней[16]

Число месяца	Июль		Август		Сентябрь		Октябрь		Ноябрь		Декабрь	
	мин.	сек.	мин.	сек.	мин.	сек.	мин.	сек.	мин.	сек.	мип.	сек.
1	12	19	10	4	16	23	26	30	31	55	25	34
2	12	8	10	8	16	42	26	49	31	55	25	10
3	11	58	10	13	17	1	27	8	31	54	24	45
4	11	48	10	18	17	21	27	26	31	52	24	20
5	11	38	10	23	17	41	27	43	31	50	23	55
6	11	28	10	28	18	1	28	0	31	47	23	30
7	11	18	10	34	18	21	28	16	31	43	23	4
8	11	9	10	41	18	41	28	32	31	37	22	38
9	11	0	10	49	19	1	28	47	31	30	22	11
10	10	52	10	58	19	21	29	2	31	22	21	43
11	10	47	11	7	19	41	29	16	31	13	21	14
12	10	38	11	16	20	1	29	30	31	3	20	44
13	10	31	11	25	20	22	29	43	30	53	20	14
14	10	25	11	36	20	43	29	56	30	43	19	44
15	10	19	11	48	21	4	30	9	30	32	19	14
16	10	13	12	1	21	25	30	22	30	20	18	44
17	10	7	12	14	21	47	30	34	30	8	18	14
18	10	2	12	28	22	9	30	45	29	55	17	44
19	9	58	12	42	22	31	30	55	29	40	17	14
20	9	54	12	57	22	52	31	4	29	23	16	44
21	9	51	13	12	23	13	31	12	29	6	16	14
22	9	49	13	27	23	33	31	19	28	48	15	44
23	9	47	13	43	23	53	31	26	28	30	15	14
24	9	46	13	59	24	13	31	32	28	11	14	43
25	9	46	14	16	24	33	31	38	27	51	14	12
26	9	46	14	33	24	53	31	43	27	30	13	41
27	9	47	14	50	25	13	31	47	27	8	13	10
28	9	49	15	8	25	33	31	50	26	45	12	40
29	9	52	15	26	25	52	31	53	26	22	12	10
30	9	56	15	45	26	11	31	55	25	58	11	40
31	10	0	16	4			31	55			11	10

и представляет $^1/_{5)}$ груза X. Эти деления изображены на фиг. 7. Здесь нижняя часть маятника разделена на 3 части, самая нижняя из которых есть AB.

A есть центр тяжести груза X; точка C — центр качаний. Перемещение длин на одно из делений, начинающихся от C, изменяет ход часов на 15″. Как эти деления были найдены, будет показано в части книги, трактующей о центре качаний.

Я бы описал также конструкцию судовых часов, служащих для определения географической долготы, если бы мы, так же как в вышеизложенном, исследовали и определили, какая конструкция часов наилучшая для этой цели. Во всяком случае исследование настолько подвинулось вперед, что лишь немногое осталось доделать, чтобы оформить столь полезное изобретение. Поэтому я позволю себе рассказать, какие опыты и с каким успехом уже были поставлены и что еще остается испытать.

Первые двое часов находились на английском судне: их заказал по образцу наших часов один знатный, дружественный мне, шотландец.[17] Вместо гирь механизм приводился в движение стальной, свернутой в спираль пружиной, как у карманных часов. Чтобы часы не пострадали при качке корабля, они были приделаны к стальному стояку, окруженному бронзовым цилиндром. Вилка, поддерживающая движение маятника, имела форму опрокинутого F с двумя захватами. (Длина маятника была $^1/_2$ фута). Такая форма вилки должна была препятствовать круговым движениям маятника, что могло вызвать остановку часов.

Когда это судно с тремя сопровождавшими его вернулось в Англию, то командир эскадры доложил следующее: он прошел из Гвинеи до острова св. Фомы, лежащего у экватора, здесь он поставил часы по солнцу и потом шел курсом на запад. Пройдя таким непрерывным курсом около 700 миль, он вновь повернул к Африке, так как этому способствовал подувший юго-западный ветер. Когда он прошел 200—300 миль в этом направлении, капитаны других судов, боясь того, что не хватит питьевой воды, посоветовали ему изменить курс и лечь курсом на остров Барбадос около Америки, чтобы там взять воду. Тогда он вызвал капитанов к себе на борт с их судовыми журналами и расчетами. Оказалось, что их расчеты значительно разнились от его расчетов, у одного капитана на 80 миль, у другого — на 100 миль, у третьего — еще больше. Он сам из расчетов времени по маятниковым часам заключил, что они находятся не более как в 30 милях от острова дель Фуэго, одного из островов Зеленого мыса, и что уже на следующий день они должны достичь этого острова. Доверяя своим часам, он приказал лечь курсом на остров дель Фуэго. И действительно, на следующий день, около полудня они увидели этот остров и через несколько часов бросили якорь у него. Таков отчет этого командующего. С тех пор опыты повторялись с переменным успехом несколько раз голландцами и французами по приказу его величества короля; но в случае неуспеха причина лежала скорее не в часах, а в небрежности лиц, которым часы были вверены. Успех был особенно велик в Средиземном море, во время экспедиции на остров Крит. Туда был послан с французскими войсками герцог Бельфорский на помощь осажденному турками городу Кандии; он, как известно, нашел там смерть в бою. На его судне были маятниковые часы, для испытания их годности. Они были поручены опытному астроному. Из ежедневных записей видно, что на основании наблюдений этого астронома были определены географические долготы всех мест, где приставали суда или мимо которых суда проезжали, определив место из визуальных наблюдений. Разность долгот всегда оказывалась в согласии с лучшими географическими описаниями. Так, например, между гаванью Тулон и Кандией была установлена разность в 1 час 22 мин., т. е. 20° 30′ географической долготы.[18] При возвращении из Кандии разность была получена очень близкая к той же. Это лучшее доказательство правильности определения разности долгот.

Далее была установлена разность времени между гаванью Тулон и островом Маретимо вблизи западного мыса Сицилии, носившего в древности имя Лилибэум, — 25 мин. 20 сек. Этому соответствует разность долгот 6° 20′.[19] Также между Тулоном и островом Сапиэнца к западу от Пелопоннеса — 1 ч. 5 м. 45 сек. по времени, т. е. разность долгот 16° 26′.

Часы были поставлены по солнцу, причем наблюдались восход и заход солнца, из высоты полюса можно было вычислить оба момента времени. Этот метод, повидимому, самый целесообразный, когда судно стоит на якоре, так как соответствующие наблюдения могут быть сделаны невооруженным глазом без специальных приборов.

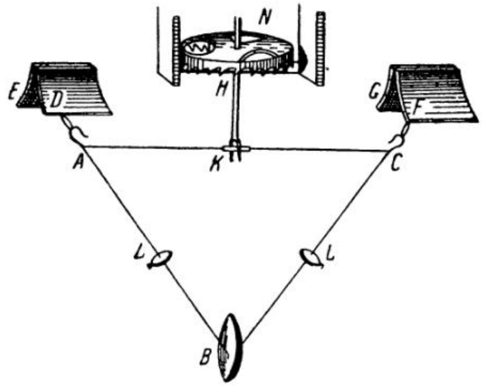
Маятник этих часов имел длину 9 дюймов и груз полфунта. Механизм приводился в движение гирями, заключенными в ящик вместе с механизмом. Длина ящика была 4 фута. Внизу он был отягчен по крайней мере 100 фунтами свинца, чтобы весь механизм возможно лучше сохранял в судне вертикальное положение.

Хотя эти опыты показали, что ход часов равномерен и совершается без помех, мы попытались все-таки еще его усовершенствовать следующим образом: к колесу, снабженному пилообразными зубьями и расположенному ближе всего к маятнику, был прицеплен при помощи искусно сделанной цепочки маленький грузик, который приводил в движение только это колесо. Весь остальной механизм должен только каждые полминуты подымать маленький свинцовый груз на прежнюю высоту, причем это производится приблизительно так, как описано выше, т. е. груз поднимается при помощи одного шнура, в то время, как при посредстве другого шнура вес груза поддерживает ход часов. Часы, построенные таким образом, давали еще бо̀льшую равномерность хода, чем ранее описанные, так как в них все было сведено как бы на одно колесо. С этими часами было сделано следующее, чрезвычайно замечательное наблюдение. Двое таких часов висели на одной и той же балке, покоящейся на двух опорах. Оба маятника двигались всегда в противоположные стороны, и колебания так точно совпадали, что никогда ни на сколько не расходились. Тикание обоих часов было слышно в одно и то же мгновение. Если искусственно нарушить это совпадение, то оно само восстанавливалось в короткое время. Сначала я был поражен этим странным явлением, но, наконец, после внимательного исследования нашел, что причина лежит в незаметном движении самой балки. Колебания маятника сообщают некоторое движение и самим часам, как бы тяжелы они ни были. А это движение передается балке, и если маятники сами не двигались в противоположных направлениях, то теперь это произойдет с необходимостью, и только тогда движение балки прекратится. Но эта причина не была бы достаточно эффективна, если бы ход обоих часов не был бы с самого начала очень однороден и согласован между собой.[20]

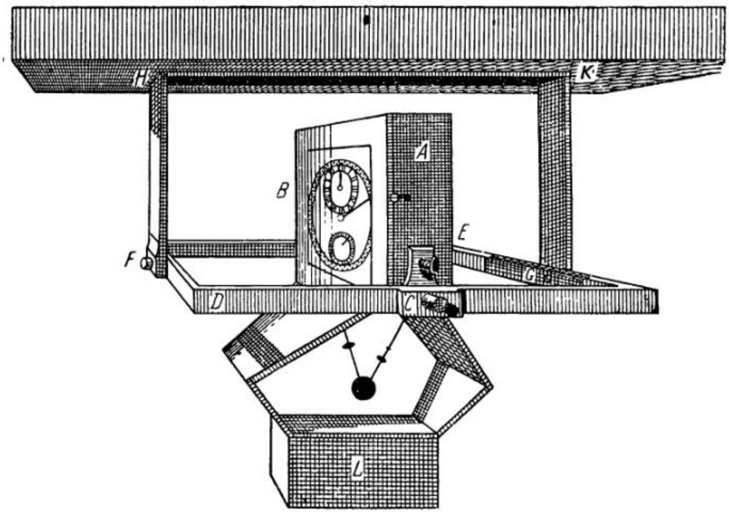
Испытание часов при плавании в океане, в особенности в бурную погоду, показало, что прежде всего часы должны быть все время в ходу, чтобы успешно противостоять качке судна; поэтому мы изменили форму маятника и, наконец, по-новому подвесили часы. Маятник имеет форму равнобедренного треугольника (фиг. 8), в направленной вниз вершине которого подвешен свинцовый груз.

В остальных двух углах треугольника подвешены нити между щеками, изогнутыми по циклоиде. Основание треугольника посредине проходит через вилку и поддерживается в движении через вилку.

Вилка получает импульс от пилообразного колеса. Весь механизм поддерживается в движении не гирями, а стальной пружиной, заключенной в капсюлю. На прилагаемой фигуре (фиг. 8) ABC — треугольный маятник, B — свинцовая чечевица, ED и FG — циклоидовидные щеки, HK — вилка с двумя зубцами, N — колесо с пилообразными зубьями, LL — две маленькие чечевицы, служащие для регулировки маятника.



Фиг. 8.



Фиг. 9.

Следующая фигура (фиг. 9) показывает способ подвеса. Ящик с весами прикреплен на двух осях, из которых видна только одна, C, к раме DE из железа. Эта рама, в свою очередь, на осях F и G вделана в раму $FHKG$, неподвижную, связанную с остовом судна. Внизу к ящику подвешен груз в 50 фунтов.[21]

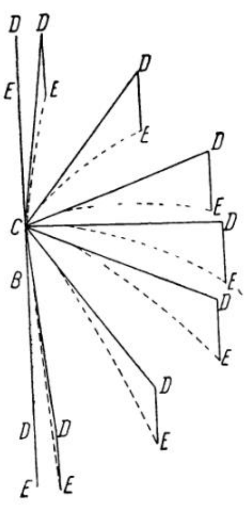
При таком подвесе часы всегда при всяком крене судна сохраняют вертикальное положение. Ось C и ей противоположная прикреплены на одной линии с подвесом маятника, поэтому маятник не в состоянии раскачать часы; нет ничего более вредного для часов, как это раскачивание. Кроме того, солидный вес осей CC и FG, имеющих толщину 1 дюйм, и свинцовый груз под часами затрудняют движения часов, и если при особо сильном толчке часы претерпят сотрясение, они все-таки быстро вернутся к покою и в вертикальное положение. Остается еще испытать усовершенствованную конструкцию в открытом море. Успех обеспечен почти наверняка. По крайней мере те опыты, которые пока удалось поставить, показывают, что эта конструкция лучше других выдерживает всякие помехи.

ВТОРАЯ ЧАСТЬ „МАЯТНИКОВЫХ ЧАСОВ“

О падении весомых тел и их движении по циклоиде

Гипотезы

I. Если бы веса не было и воздух не сопротивлялся движению тел, то каждое из них продолжало бы достигнутое движение прямолинейно и с постоянной скоростью.



Фиг. 10.

II. Однако, благодаря действию веса, причину которого мы не рассматриваем, случается, что тела производят сложное движение, составленное из равномерного движения в том или ином направлении и из движения, вызванного весом и направленного по вертикали вниз.

III. Эти два движения можно рассматривать отдельно, и каждое из них не влияет на другое.

Предположим, что весомое тело C падает из состояния покоя и за некоторое время F проходит под давлением силы тяжести путь CB (фиг. 10). Предположим также, что весомое тело приобрело откуда-нибудь движение, согласно которому оно за то же время F при отсутствии силы тяжести прошло бы с равномерной скоростью прямолинейный путь CD.

Так как на самом деле прибавляется еще сила тяжести, то тело не придет из C в D, но в некоторую точку E, расположенную по вертикали под точкой D, причем всегда DE равно CB; таким образом, оба движения — равномерное и движение под действием силы тяжести — каждое будет иметь свою долю, не мешая друг другу. Из наших дальнейших рассуждений станет ясным, каков вид пути, проходимого телом в таком сложном движении, если равномерное движение совершается не по вертикали. Но когда равномерное движение направлено по вертикали вниз, то ясно, что линия CD удлиняется под действием тяжести на длину DE. Равным образом, когда равномерное движение совершается по вертикали вверх, то линия CD укорачивается на DE, так что по истечение времени F тело всегда будет находиться в E.

Если мы в двух указанных случаях исследуем оба движения отдельно, при предположении, что они друг другу не мешают, то мы можем найти причину и законы ускорения при свободном падении тел. Сначала докажем следующие два предложения.

Предложение I

Скорость свободно падающего тела возрастет в равные времена на одинаковые величины. Равным образом и пути, проходимые в одинаковые времена, начиная от начала движения, возрастают на одинаковые величины. [22]

Пусть в первый промежуток будет пройден путь AB (фиг. 11), и в точке B приобретена скорость такая, что тело во второй промежуток τ прошло бы с равномерной скоростью путь BD. Мы знаем, что путь, действительно пройденный во второй промежуток времени, будет больше BD, так как путь BD был бы пройден, если бы вся сила тяжести перестала существовать в момент прохождения телом точки B. На самом деле тело будет совершать сложное движение, состоящее из равномерного движения, при котором тело пройдет путь BD, и из движения падающего тела, благодаря которому тело должно спуститься на длину, равную AB. Отсюда мы узнаем, что тело во второй промежуток времени τ опустится до точки E, построенной путем прибавления к BD длины DE, равной AB. Скорость в точке E в конце второго промежутка времени τ должна быть вдвое больше скорости в конце первого промежутка времени τ. Действительно, как мы уже указали, тело совершает сложное движение, составленное из равномерного движения со скоростью, приобретенной в B, и из движения, вызываемого тяжестью. Последнее, очевидно, будет во второй промежуток времени таким же, как в первый промежуток, и должно сообщить телу в течение второго промежутка времени такую же скорость, какую он приобрел к концу первого промежутка времени. Так как тело, кроме того, сохранило всю скорость, приобретенную к концу первого промежутка времени τ, то к концу второго промежутка времени τ тело будет обладать двумя такими скоростями, т. е. его скорость будет вдвое больше.

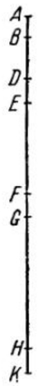
Если бы затем тело, дойдя до E, продолжало свой путь только с постоянной скоростью, приобретенной в этой точке, то оно, очевидно, за третий промежуток τ прошло бы путь EF, вдвое больший, чем BD, ибо мы показали выше, что тело прошло бы BD равномерным движением с половинной скоростью за то же время τ. Так как опять прибавляется действие тяжести, то тело за третий промежуток τ пройдет еще расстояние FG, равное AB или DE. Следовательно, к концу третьего промежутка τ тело будет находится в G. Его скорость в этой точке будет в три раза больше, чем в B, в конце первого промежутка времени, потому что к скорости в точке E, которая была вдвое больше, чем скорость в B, прибавилась в течение третьего промежутка τ под действием силы тяжести еще скорость, равная приобретенной в точке B в течение первого промежутка времени τ.

Таким же образом можно доказать, что в течение четвертого промежутка времени τ будет пройден путь GH, в три раза больший, чем BD, и еще длина HK, равная AB, и что скорость, приобретенная в точке K, к концу четвертого промежутка времени τ будет в четыре раза больше, чем скорость в точке B к концу первого промежутка времени τ. Если сравнить пути, проходимые в отдельные последовательные промежутки времени τ, то окажется, что они в каждый промежуток времени увеличиваются на BD. Вместе с тем и скорости увеличиваются на одинаковую величину в одинаковые промежутки времени.

Предложение II

Путь, пройденный за определенное время падающим из состояния покоя телом, вдвое меньше того пути, который прошло бы это тело за то же время при равномерном движении со скоростью, приобретаемой телом в последний момент рассматриваемого падения.

Примем те же гипотезы, как и в предыдущем предложении. Пусть AB (фиг. 11) снова обозначает путь, пройденный падающим телом за некоторое время τ; BD — путь, который тело прошло бы за то же время, если бы оно двигалось равномерно со скоростью, приобретенной в конце промежутка времени τ или в конце пути AB. Я утверждаю, что BD вдвое больше AB.



Фиг. 11.

Пути, пройденные в четыре последовательных промежутка времени τ, суть AB, BE, EG, GK. Они находятся в определенном соотношении друг к другу. Это соотношение не изменится, если взять промежуток времени вдвое больший. Тогда первым промежутком будет время, в течение которого пройдены пути AB и BE, а вторым — время, в течение которого пройдены пути EG и GK. Пути AK и EK, пройденные телом в равные промежутки времени и начиная с состояния покоя, должны относиться друг к другу, как AB и BE, также пройденные в равные промежутки времени и начиная с состояния покоя.

Имеем $\frac{AB}{BE}=\frac{AE}{EK}$. Заменим BE через AD и перевернем дроби; получим $\frac{AD}{AB}=\frac{EK}{AE}$. Вычтем из обеих частей равенства по единице:

$$\frac{BD}{AB}=\frac{EK-AE}{AE}.$$

В предыдущей теореме показано, что

$$FG=HK=AB;\quad EF=2BD;\quad GH=3BD;$$
$$AE=2AB+BD;\quad EK=2AB+5BD;$$
$$EK-AE=4BD.$$

Следовательно, имеем

$$\frac{BD}{AB}=\frac{4BD}{AE},$$

т. е.

$$AE=4AB,$$

но AE равно также $2AB+BD$, т. е. $BD=2AB$, что и требовалось доказать.

Предложение III

Если при свободном падении взять два произвольных промежутка времени (оба от начала движения), то пути, пройденные за эти промежутки времени, относятся, как квадраты времен, или так же, как квадраты приобретенных конечных скоростей.

В теореме 1 показано (фиг. 11), что пути AB, BE, EG, GK, пройденные в последовательные равные времена, нарастают на ту же величину, а именно, на BD. Далее мы знаем

$BD=2AB,\quad BE=3AB,\quad FG=5AB,\quad CK=7AB$, и т. д.

Пути, проходимые в последовательные единицы времени, растут, как нечетные числа, начиная с единицы: 1, 3, 5, 7, 9 и т. д. Если же образовывать суммы этих чисел, всегда с единицы, то получается точный квадрат, основание которого — число слагаемых (например, сумма первых трех слагаемых есть 9, четырех — 16). Отсюда следует, что пути, проходимые от начала падения, относятся, как квадраты времени. Правда, при этом сделано предположение, что промежутки времени соизмеримы между собой. Легко обобщить вывод на случай несоизмеримых промежутков времени.

Действительно, рассмотрим два таких промежутка времени, отношение которых равно отношению длин AB и CD (фиг. 12), и пусть E и F представляют пути, пройденные в эти времена, оба раза от начала движения. Я утверждаю, что отношение путей равно отношению квадрата AB к квадрату CD.

Допустим, что это неверно и что

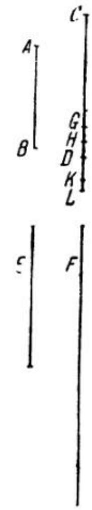
$$\frac{E}{F} > \frac{AB^2}{CD^2},$$

тогда

$$\frac{E}{F} = \frac{AB^2}{CG^2},$$

где

$$CG < CD.$$



Фиг. 12.

Возьмем между G и D точку H, такую, чтобы AB и CH были соизмеримы; это всегда возможно. Имеем

$$CH > CG.$$

Путь, пройденный за время AB, относится к пути, проходимому за время CH, как $AB^2 : CH^2$, как выше доказано.

Но путь F, проходимый за время CD, больше пути, проходимого за время CH. Но $E : F = AB^2 : CG^2$ по предположению, следовательно,

$$\frac{AB^2}{CG^2} < \frac{AB^2}{CH^2}$$

или $CG^2 > CH^2$, что нелепо, так как $CH > CG$. Следовательно, $\frac{E}{F}$ не может быть больше $\frac{AB^2}{CD^2}$.

Предположим, что оно меньше, если это возможно. Пусть $\frac{E}{F} = \frac{AB^2}{CL^2}$, где $CL > CD$.

Возьмем между D и L точку K такую, чтобы AB и CK были соизмеримы; это всегда возможно.

Пусть E относится к пути, пройденному за время CK, как AB^2 к CK^2, но пространство F, проходимое за время CD, меньше пространства, проходимого за время CK

$$\frac{E}{F} > \frac{AB^2}{CK^2}.$$

Но $\frac{E}{F} = \frac{AB^2}{CL^2}$ по предположению. Отсюда $\frac{AB^2}{CL^2} > \frac{AB^2}{CK^2}$, т. е. $CL^2 < CK^2$, что нелепо, так как $CL > CK$.

Следовательно, $\frac{E}{F}$ не может быть меньше $\frac{AB^2}{CD^2}$, т. е. эти два соотношения должны быть равны. Наконец, так как скорости, приобретаемые в конце промежутков времени AB и CD, пропорциональны этим временам, то проходимые пути E и F относятся так же, как квадраты скоростей, приобретаемых за эти времена. Таким образом, предложение доказано.

Предложение IV

Если тело начнет подыматься вверх со скоростью, приобретенной в конце свободного падения, то оно в одинаковые времена будет проходить вверх те же пути, которые проходило раньше в обратном направлении, и тело подымется до той же высоты, с которой оно падало; кроме того, в равные времена скорость будет убывать на равные величины.

Рассмотрим, как в предложении II, произвольное число путей, пройденных падающим из состояния покоя телом в одинаковые промежутки времени (фиг. 11): из них первый AB; второй есть сумма пути BD, который мог бы быть пройден с постоянной скоростью, приобретенной при падении по AB и DE, равного AB; третий есть сумма EF, равного двум BD, и FG, равного AB; четвертый — сумма GH, равного трем BD, и HK, равного AB, и т. д., если есть еще промежутки времени.

Я утверждаю, что при движении вверх тело в те же одинаковые промежутки времени пройдет пути KG, GE, BE, BA, если тело начнет свое движение вверх со скоростью, приобретенной в конце падения в точке K.

Скорости изображаются для краткости путями, которые были бы пройдены телом в такой же промежуток времени при равномерном движении с изображаемой скоростью.

Достигнув при падении точки K, тело, согласно доказанному в предыдущих теоремах, имеет скорость $GH + BD$, или FK, так как $FK = FG + GH + HK = GH + 2AB = GH + BD$. С этой скоростью тело начинает подыматься и через выбранный нами промежуток времени оказалось бы в точке F, но вследствие действия силы тяжести оно падает на $FG = AB$, как это следует из одной из наших начальных гипотез, и тело оказывается в G. Итак, в течение первого промежутка времени тело подымается только на высоту KG, с которой оно опустилось в предыдущий промежуток времени. При этом скорость также должна была уменьшиться на величину скорости, приобретаемой падающим телом во время падения в течение одного промежутка времени, т. е на BD. После поднятия тела до точки G у него остается скорость HG, так как в начале поднятия скорость была $HG + BD$. Но $HG = GD$, так как $HG = EF + BD = EF + 2AB = EF + FG + ED = GD$.

Поэтому, если бы тело подымалось от G с равномерной скоростью GD, оно бы в течение одного промежутка времени поднялось до D. Но вследствие действия силы тяжести эта высота уменьшится на $DE = AB$ и тело в течение второго промежутка времени подымется только на GE, на ту же величину, на которую оно упало в такой же промежуток времени. В то же время и скорость тела должна уменьшиться снова на величину BD, величину скорости, приобретаемой телом при падении в течение одного промежутка времени. Итак, поднявшись в E, тело будет иметь скорость $FE = GD - BD$, так как $BD = DE + FG$.

Но $FE = EA$, так как $FE = 2BD$ или

$$FE = BD + 2AB = BD + AB + DE.$$

Следовательно, если бы тело подымалось от E с постоянной скоростью EA, то оно поднялось бы в A за один промежуток времени. Но вследствие действия силы тяжести эта высота снизится на AB. Таким образом, тело подымется на BE, тот же путь, который был пройден при падении в течение такого же промежутка времени. За время этого поднятия опять должна была утратиться скорость BD. Следовательно, тело, поднявшись в B, будет иметь скорость BD.

Если бы тело подымалось от B с постоянной скоростью BD, то оно поднялось бы на $2AB$. Но под действием тяжести тело упадет на путь AB, и потому оно подымется только до точки A.

Может быть, найдутся люди, которые станут утверждать, что тело поднялось выше A и потом упало в A. Но это утверждение нелепо, так как тело не может под действием тяжести подняться выше той высоты, с которой оно упало.[23]

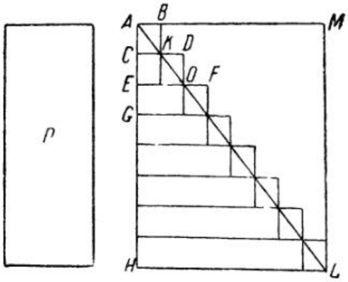
Далее из нашего рассмотрения следует, что скорость, которой тело обладало в B, должна была уменьшиться на BD, и тело, поднявшись до A, не будет иметь никакой скорости и, следовательно, не сможет подняться выше. Таким образом, доказано, что тело поднялось бы до той же высоты, с которой упало, и что пути, пройденные при падении в равные промежутки времени, будут пройдены при подъеме в те же промежутки времени: также доказано, что скорости в равные времена убывают на равные величины. Таким образом, предложение доказано.

Доказательство последнего предложения основано на предложении II. А эту теорему мы доказали на основании предположения, что пути, пройденные свободно падающим телом в последовательные равные промежутки времени, находятся в определенном соотношении между собой и это соотношение не зависит от величины промежутков времени. Это положение лежит в природе вещей. Однако, если кто-либо будет его оспаривать, то придется признаться в тщетности попыток определения этих соотношений. Но так как наша теорема может быть доказана и без сделанного выше предположения по методу Галилея, то стоит привести и это доказательство в более строгой форме, чем у Галилея.[24]

Итак, здесь еще раз доказывается следующее предложение.

Предложение V

Если тело падает из состояния покоя, то пройденный им за определенное время путь составляет половину того пути, которое прошло бы тело за то же время при равномерном движении со скоростью, приобретенной в конце пути.



Фиг. 13.

Пусть тело (фиг. 13) при свободном падении прошло путь, изображаемый площадью фигуры P. Потребное для этого время изображается прямой AH. Проводим линию HL, произвольной длины, перпендикулярную AH, и примем ее за скорость в конце падения. Построим прямоугольник $AHLM$; мы считаем его площадь равной длине пути, проходимого телом за время AH со скоростью HL. Требуется доказать, что площадь фигуры P равна половине площади прямоугольника MH; или, проведя диагональ AL, что площадь P равна площади треугольника AHL.

Если P не равна площади AHL, то она или больше, или меньше AHL. Допустим сначала, что площадь P меньше площади треугольника AHL. Делим AH на равные части AC, CE, EG, и т. д. и описываем около $\triangle AHL$ фигуру S, состоящую из прямоугольников BC, DE, FG, и т. д., имеющих высотою отдельные части AH, т. е. AC, CE, и т. д.

Вписываем также в треугольник AHL фигуру T,[25] состоящую из прямоугольников KE, GO, и т. д., также имеющих высотой AC, CE, EG, и т. д. Берем число частей AC, CE... достаточно большое, чтобы разность между вписанной и описанной фигурами была бы меньше разности треугольника AHL и P. Это, очевидно, всегда возможно, так как разность описанной и вписанной фигуры равна площади маленького прямоугольника, имеющего основанием HL, а высотой величину одной части AH, например AC.

$$S - T < AHL - P,$$

следовательно, тем более

$$\triangle AHL - T < AHL - P,$$

т. е.

$$T > P,$$

Вписанная фигура больше площади P.

С другой стороны, положим AH равным всему времени падения, а AC, CE, EG представляют равные части этого времени. Так как скорость падающего тела растет пропорционально времени (по предложению I) и так как скорость в конце падения равна HL, то скорость в конце промежутка времени AC будет CK, так как

$$\frac{AH}{AC} = \frac{HL}{CK}.$$

Равным образом скорость, приобретенная в конце второго промежутка времени, будет EO, и т. д. Ясно также, что в течение первого промежутка времени AC падающим телом будет пройден некоторый путь, больший нуля, и что в течение второго промежутка времени CE будет пройден путь больший, чем прямоугольник KE, так как путь KE был бы пройден за промежуток времени CE, если бы движение совершалось с равномерной скоростью CK. Действительно, отношение путей, пройденных равномерным движением, составляется из отношения времен и отношения скоростей. Из нашего положения, что путь MH пройден за время AH со скоростью HL, следует, что путь KE проходится за время CE со скоростью CK, так как отношение прямоугольника MK к прямоугольнику KE составлено из отношений

$$\frac{AH}{CE} \text{ и } \frac{HL}{CK}.$$

Как только что указано, путь KE проходится за время CE с равномерной скоростью CK, а на самом деле движение ускоренное и скорость была равна CK только в начальный момент; отсюда ясно, что падающее тело пройдет за время CE бо́льший путь, чем KE. По той же причине падающее тело в третий промежуток времени EG пройдет путь больший, чем OG, так как OG было бы пройдено за это время при движении с равномерной скоростью EO, и т. д.

В каждый промежуток, на которые разделено время AH, падающее тело пройдет путь больший, чем соответствует прямоугольнику вписанной фигуры T. Поэтому и весь путь, пройденный ускоренным движением, будет больше вписанной фигуры T.

$$T < P.$$

Но это противоречит выведенному выше результату $T > P$. Следовательно, наше предположение, что площадь P меньше площади треугольника AHL, неверно.

Покажем, что площадь P не может быть и больше AHL. Сделаем допущения, что P больше AHL, если это возможно. Снова разделим AH на достаточное число частей, опишем около треугольника фигуру S и впишем фигуру T (обе составлены из прямоугольников). Число частей на длине AH должно быть таким, чтобы

$$S-T<P-AHL.$$

Отсюда мы выводим неравенство $S<P$.

Но совершенно ясно, что в первый промежуток времени AC тело пройдет путь меньший BC, так как путь BC проходится за то же время при равномерном движении со скоростью CK, которую падающее тело имеет только в конце промежутка времени AC. Точно так же во второй промежуток времени CE ускоренным движением будет пройден путь меньший, чем DE, так как путь DE проходится в то же время CE с равномерной скоростью EO, которую падающее тело имеет в конце промежутка времени CE. И так далее, в каждом промежутке, на которые разделено время AH, падающее тело пройдет путь меньший соответствующего прямоугольника фигуры S.

Следовательно, и весь путь, пройденный падающим телом, т. е. P, будет меньше, чем S. Но это нелепо, поскольку мы доказали, что $P>S$. Итак, путь P не может быть больше треугольника AHL; но ранее мы доказали, что он не может быть также меньше треугольника AHL. Следовательно, путь P равен AHL, что и требовалось доказать.

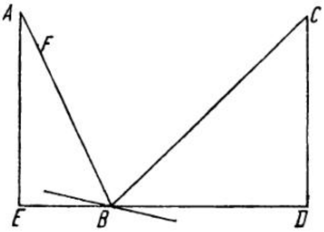
Все предыдущие выводы в одинаковой мере относятся как к телам, опускающимся или подымающимся по наклонным плоскостям, так и к совершающим вертикальное движение, так как предположения о действии тяжести в обоих случаях одни и те же. Вследствие этого не трудно доказать следующую теорему, которую Галилей высказал как постулат, как бы считая ее верность непосредственно ясной, ибо доказательство, которое он позднее пытался дать и которое содержится во втором издании его сочинений, довольно слабо обосновано, по крайней мере на мой взгляд.[26]

Дело идет о следующем предложении.

Предложение VI

Скорости, приобретаемые весомыми телами при падении по наклонным плоскостям разного наклона, одинаковы, если высоты наклонных плоскостей равны.[27]

Даны две наклонные плоскости (фиг. 14). Пересекаем их вертикальной плоскостью. AB и CB — следы наших наклонных плоскостей. Их высоты AE и CD равны. Пусть тело падает один раз по AB, другой раз по CB.



Фиг. 14.

Я утверждаю, что в обоих случаях скорость тела в точке B одна и та же. Допустим, что скорость, приобретаемая при падении по CB, меньше скорости приобретаемой при падении по AB, и что тело, упав вдоль CB, приобретает скорость, которую оно могло бы приобрести, падая вдоль AB, но не из точки A, а из более низкой точки F. Но если тело падает по CB, то оно приобретает скорость, при помощи которой оно может опять подняться по всей длине CB (по предложению IV).

Следовательно, и при падении по FB тело приобретает скорость, которая позволит ему подняться по всей длине BC. Таким образом, тело, упавшее из F в B и продолжающее свой путь по BC (что можно осуществить путем отражения от наклонно поставленной плоскости) может подняться до C, т. е. на высоту, бо́льшую своей первоначальной высоты, что представляет нелепость. Подобными же рассуждениями можно показать, что и скорость, приобретаемая при падении вдоль AB, не может быть меньше скорости, приобретаемой при падении вдоль CB.

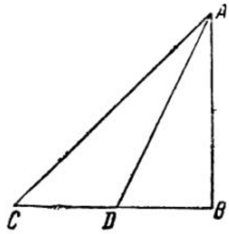
Следовательно, обе скорости должны быть равны, что и требовалось доказать. Одну из наклонных плоскостей можно заменить вертикальной линией, равной высоте наклонной плоскости, и заставить тело падать по этой вертикали. При этом несомненно получится та же скорость, как и при падении по наклонным плоскостям.

Доказательство было бы таким же.

Основываясь на вышеизложенном, можно совсем строго доказать другую теорему Галилея, являющуюся основой всего его учения о падении по наклонной плоскости.

Предложение VII

Времена падения по наклонным плоскостям разного наклона, но одинаковой высоты, относятся, как длины наклонных плоскостей.



Фиг. 15.

Пусть (фиг. 15) AC и AD — наклонные плоскости, AB — их общая высота. Утверждается, что

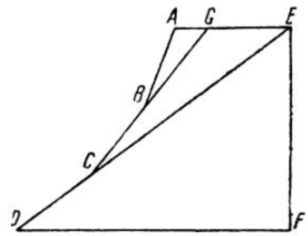
$$\frac{\text{время падения вдоль } AC}{\text{время падения вдоль } AD} = \frac{AC}{AD}.$$

Время падения вдоль AC равно времени, в течение которого тело при равномерном движении проходит этот путь AC, со скоростью, составляющей половину скорости, приобретаемой при падении вдоль AC (по предложению II). Подобным же образом время падения вдоль AD равно времени равномерного движения вдоль AD со скоростью, равной половине скорости, приобретаемой при падении вдоль AD. Но половина скорости в C равна половине скорости в D (по предыдущему предложению), поэтому продолжительности равномерного движения вдоль AC и AD относятся, как эти длины. Этим продолжительностям равны времена падения по AC и AD. Следовательно, и они относятся, как длины наклонных плоскостей, что и требовалось доказать. То же рассуждение относится и к падению вдоль вертикали. Время свободного падения по AB относится к времени падения по AC, как AB к AC.

Предложение VIII

Если тело падает с определенной высоты непрерывным движением по любому числу связанных плоскостей любого наклона, то его конечная скорость будет всегда одна и та же, пока не меняется высота, и будет равна скорости, приобретаемой при свободном вертикальном падении с этой высоты.

Пусть AB, BC, CD (фиг. 16) — связанные плоскости. Верхняя конечная точка A имеет над горизонтальной плоскостью, проведенной через нижнюю точку D, высоту, равную перпендикуляру EF.



Фиг. 16.

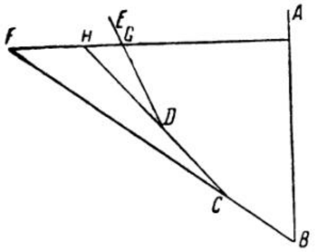
Пусть тело падает вдоль наклонных плоскостей от A до D.

Я утверждаю, что скорость тела в D будет та же, какую тело приобрело бы в F, если бы оно упало из E. Продолжаем CB до пересечения в G с прямой AE и также DC до пересечения с той же прямой AE в E. Скорость при падении вдоль AB будет в точке B та же, что и при падении вдоль GB (по теореме VI). Ясно, что скорость в C при падении вдоль AB и BC будет та же, что и при падении GC, т. е. та же, что и при падении вдоль EC (если принять, что поворот в B не влияет на движение). И последний участок CD тело проходит так, точно бы оно падало из E. Тело при падении AB, BC, CD приобретет в D ту же скорость, что и при падении вдоль ED, а эта скорость равна скорости, приобретаемой при падении вдоль EF, что и требовалось доказать.

Отсюда непосредственно следует, что тело, падающее по дуге круга или вдоль какой-нибудь другой кривой, приобретает всегда одну и ту же скорость, лишь бы только высота падения была одна и та же; и эта скорость равна скорости, приобретаемой при вертикальном падении с данной высоты, так как любую кривую линию можно считать составленной из бесконечного числа прямых линий.

Предложение IX

Если тело после падения поворачивает наверх в своем движении, то оно всегда подымется на ту же высоту, с которой упало, независимо от числа и наклона связанных плоскостей, по которым оно будет двигаться.



Фиг. 17.

Пусть тело падает с высоты AB (фиг. 17) и пусть от точки B вверх расположены наклонные плоскости BC, CD, DE, причем верхняя точка E находится на той же высоте, что и A. Я утверждаю, что тело, упавшее вдоль AB и подымающееся по наклонным плоскостям BC, CD и DE, подымется до точки E.

Предположим, если это возможно, что тело может подняться только до точки G.

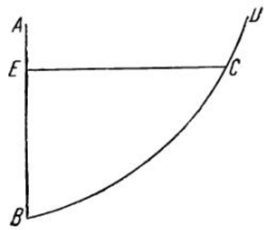
Продолжим BC и CD до их пересечения с горизонтальной линией GF в точках F и H. Если тело поднялось по BC и CD, то у него остается только скорость, достаточная для подъема по DG или DH (так как в предложении VI показано, что в обоих случаях нужна одна и та же скорость). Поднявшись по BC, тело будет иметь скорость, достаточную для подъема по CH или CF. Следовательно, в B скорость тела будет достаточна для подъема по BF, т. е. это будет та скорость, которую тело приобретает, падая по FB. Но в B тело обладает скоростью, благодаря которой оно в состоянии подняться до A. Выходит, что падение вдоль FB дает телу скорость, достаточную, чтобы подняться вдоль BA выше своей первоначальной высоты, что невозможно.

То же доказательство остается в силе, каково бы ни было число наклонных плоскостей, вдоль которых подымается тело. Следовательно, и при бесконечном числе плоскостей, т. е. при кривой поверхности, тело подымется на ту же высоту, с которой оно упало.

Предложение X

Если тело падает по вертикали или вдоль какой-нибудь поверхности и затем вследствие приобретенной скорости подымается по другой поверхности, то при падении и подъеме в точках одинаковой высоты скорость будет одинаковая.

Пусть тело (фиг. 18) падает с высоты AB и затем подымается по поверхности BCD. Пусть точка C этой поверхности находится на той же высоте, что и точка E на AB. Я утверждаю, что скорость в C будет равна скорости в точке E.



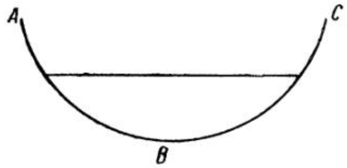
Фиг. 18.

Его скорость в C такова, что оно, благодаря ей, может подняться до точки D, лежащей на высоте A (по предыдущему предложению). При падении от A до E тело как раз приобретает эту скорость по предыдущему предложению. Следовательно, тело, поднявшееся до C, обладает как раз той же скоростью, как и падающее тело в E, что и требовалось доказать.

Предложение XI

Если тело падает вдоль какой-нибудь поверхности и потом меняет направление движения и подымается по той же или по симметричной и симметрично расположенной поверхности, то при падении и поднятии одинаковые пути проходятся в одинаковые времена.

Пусть (фиг. 19), тело падает вдоль AB и, придя в B, изменив направление движения, подымается вдоль той же поверхности BA или же по симметричной BC. Из предыдущего следует, что тело достигнет той же высоты, с которой упало. Так как тело, по предыдущей теореме, при падении и при подъеме должно иметь одинаковые скорости в точках одинаковой высоты, то ясно, что тело пройдет по той же линии дважды таким образом, что в соответствующих точках скорость будет одна и та же. Следовательно, и продолжительность обоих пробегов будет одна и та же, что и требовалось доказать.



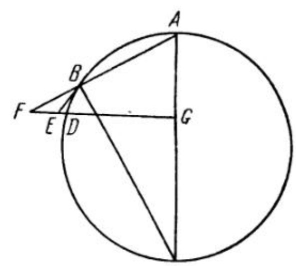
Фиг. 19.

Предложение XII

Пусть ABC — круг (фиг. 20), AC — диаметр круга, F — точка вне круга. Опустим из F перпендикуляр на AC и соединим F с A. Прямая AF обязательно пересекает окружность, напр. в B.

Я утверждаю, что дуга BD, расположенная между линиями AF и GF, меньше прямой FD.

Соединяем B и C прямой линией и строим в B касательную к кругу BE; она обязательно пересекает FG между F и G. Имеем $\angle BAC = \angle EBC$ (Эвклид, книга III, теорема 32), их дополнения до прямого угла также равны: $\angle FBE = \angle BCA$. Но и $\angle AFG = \angle BCA$ (из подобия треугольников AFG и ABC). Следовательно, $\angle FBE = \angle AFG$, т. е. треугольник FBE — равнобедренный, и мы имеем $FE = BE$.



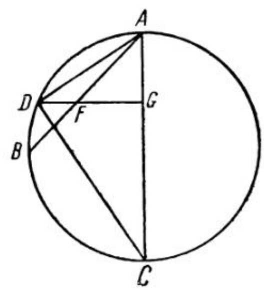
Фиг. 20.

Прибавляем по ED с каждой стороны равенства. Это дает $FD = BE + ED$.

Но $BE + ED$ несомненно больше дуги BD, имеющей те же конечные точки и вогнутой в ту же сторону. Следовательно, и FD больше дуги BD. Предложение тем самым доказано.

Предложение XIII

Сделаем то же построение, но с точкой F внутри круга. Тогда прямая AB также пересекает прямую DG внутри круга. В этом случае утверждается, что дуга BD между прямыми AB и DG больше, чем прямая DF.



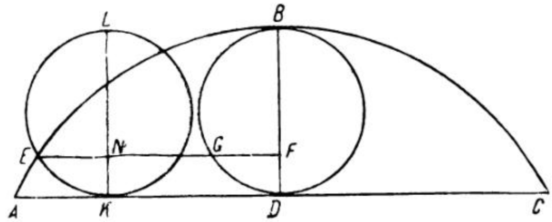
Фиг. 21.

Действительно (фиг. 21), соединим D с C и проведем хорду, соответствующую дуге BD. Тогда $\angle ABD = \angle ACD$, а следовательно, $\angle ABD = \angle ADG$. Но $\angle DFB > \angle ADF = \angle ADG$, вследствие этого $\angle DFB > \angle DBF$, поэтому в треугольнике DFB сторона $DB >$ стороны DF; тем более дуга DB будет больше стороны DF. Таким образом, предложение доказано.

Предложение XIV

Пусть (фиг. 22) ABC — циклоида с основанием AC и осью BD (ее построение я полагаю известным на основании того, что сказано выше о ее определении и механическом воспроизведении). Строим на оси BD, как на диаметре, круг и проводим через любую точку циклоиды E линию, параллельную основанию циклоиды. Эта линия пересечет ось в F и круг в G. Я утверждаю, что прямая GE равна дуге GB.

Строим второй круг того же радиуса, проходящий через E и касательный к основанию в точке K, и проводим диаметр KL. Тогда прямая AK равна дуге EK. С другой стороны, вся длина AD равна полуокружности KEL. Следова-



Фиг. 22.

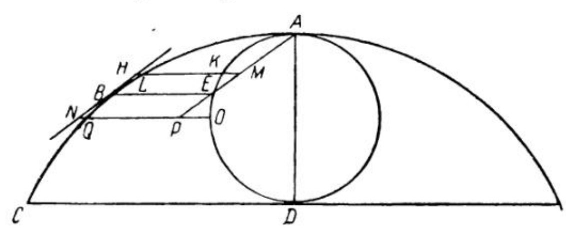
тельно, KD или NF равна дуге BG. Далее $NF=EG$, так как $EN=GF$ и часть NG общая. Отсюда следует:

$$GE=\smile GB.$$

Предложение XV

Провести к циклоиде касательную в данной точке.

Дана (фиг. 23) циклоида CA и на ней точка B. Надо провести касательную к циклоиде в этой точке B. Строим



Фиг. 23.

около оси циклоиды AD, образующую окружность AED. Проводим через B линию BE, параллельную основанию циклоиды, которая пересекает окружность в точке E. Соединяем E с A и проводим через B линию HBN, параллельную AEP. Я утверждаю, что это и будет искомая касательная к циклоиде. Действительно, возьмем на прямой HBN точку H выше точки B и проведем череа H прямую, параллельную основанию CD. Она пересечет циклоиду в L, круг в K и прямую AE в M. Тогда $KL =$ дуге KA и $KM <$ $<$ дуги KE.

Следовательно, прямая $ML <$ дуги AE. С другой стороны, дуга $AE =$ прямой $BE =$ прямой MH. Следовательно, $ML < MH$, т. е. H лежит вне циклоиды.

Теперь возьмем на прямой HBN точку N ниже точки B и проведем, как и раньше, прямую, параллельную основанию CD, которая пересечет циклоиду в Q, продолжение прямой AE в P и круг в O.

Имеем $OQ =$ дуге OA, $OP >$ дуги OE и $PQ <$ дуги AE, но дуга $AE = BE = PN$, следовательно, $PQ < PN$, т. е. точка N лежит вне циклоиды.

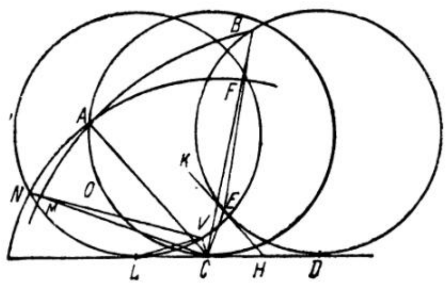
Итак, любая точка прямой HBN, кроме точки B, лежит вне циклоиды; следовательно, прямая HBN касается циклоиды в точке B, что и требовалось доказать.

Я колебался, должен ли я дать в своей книге место этому доказательству, так как я нашел в книге Уоллиса о циклоиде похожее доказательство, принадлежащее знаменитому Рену.[28]

Однако из этого предложения можно выявить общую конструкцию, применимую не только к циклоиде, но и к другим кривым, возникающим из качения какой-либо фигуры, лишь бы эта фигура была бы всегда вогнутой в одну и ту же сторону и была бы геометрически определенной фигурой.[29]

Пусть (фиг. 24) кривая NAB[30] получается при качении фигуры OL вдоль прямой LD; другими словами, пусть эта кривая NAB описывается точкой N, находящейся на контуре фигуры OL. Предложено провести касательную к кривой NAB в точке A.

Проводим линию CA, соединяющую точку A с точкой C, в которой фигура OL касалась прямой LD в тот момент, когда точка, описывающая кривую, находилась в A. Точку контакта C всегда можно найти, так как задача сводится к проведению двух параллельных линий, из которых одна проходит через точку контура, образующую кривую, а другая касательна к фигуре. Расстояние двух параллельных линий равно расстоянию A от LD.



Фиг. 24.

Я утверждаю, что соединительная линия AC пересекает кривую под прямым углом. Если вокруг C радиусом AC провести дугу круга, она будет касаться кривой в A. Перпендикуляр, восстановленный к AC в точке A, будет касательной к кривой. Действительно, соединим сначала с точкой C точку B на кривой, более удаленную от основания, чем A, и представим себе фигуру в положении BD, при котором точка контура фигуры, образующая кривую, находится как раз в B, а касание фигуры с основанием происходит в D; пусть точка фигуры, бывшая в C в момент, когда образующая кривую точка была в A, теперь поднялась до E. Проводим прямые EC и BE и строим касательную к фигуре в точке E; она пересекает основание в H.

Имеем

$$CD = \smile ED,$$
$$EH + HD > \smile ED,$$

отсюда

$$EH > CH.$$

Следовательно, в треугольнике ECH

$$\angle ECH > \angle CEH,$$

а значит

$$\angle ECL < \angle CEK.$$

Тем более

$$\angle ECL - \angle LCB < CEK + \angle KEB,$$

т. е.

$$\angle ECB < \angle CEB.$$

Следовательно, в треугольнике CEB сторона $EB <$ стороны CB; но $EB = CA$, так как это та же линия, перенесенная вместе с фигурой.

Отсюда $CB > CA$ или $CB > CF$, т. е. точка B лежит вне окружности круга MAF.

Возьмем теперь точку N, лежащую между основанием и точкой A. Предположим следующее. Когда точка, описывающая кривую, находилась в N, описывающая фигура занимала положение VL и точка касания находилась в L. Точка, которая при положении AC находилась в C, теперь занимает положение V.

Проводим линии CN, NV, VC, VL. Имеем

$$VN = CA,$$

так как CA было перенесено в положение VN.

Далее прямая LC равна дуге LV и, значит, больше хорды LV. Следовательно, в треугольнике LVC

$$\angle LVC > \angle LCV,$$

тем более

$$\angle LVC + \angle LVN > \angle LCN - \angle LCN$$

или

$$\angle CVN > \angle NCV,$$

т. е. в треугольнике CVN сторона $CN >$ стороны VN; но

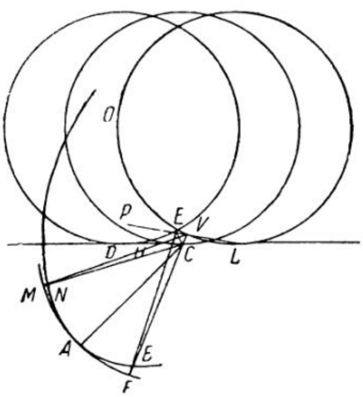
$$NV = AC = MC,$$

отсюда

$$NC > MC,$$

т. е. точка N лежит вне окружности MAF, которая, следовательно, касается кривой в точке A, что и требовалось доказать.

Построение и доказательство не меняются и в том случае, если кривая образуется точкой, лежащей внутри или вне контура катящейся фигуры.[31] Только во втором случае часть кривой лежит ниже основания. Это вызывает некоторые изменения в доказательстве.



Фиг. 25.

Пусть (фиг. 25) данная точка A, в которой надо построить касательную, лежит на части кривой NAB, расположенной под основанием CL. Кривая описывается точкой, лежащей вне контура катящейся фигуры, но имеющей определенное положение в той же плоскости. Находим точку C, в которой катящаяся фигура касается основания CD, когда образующая точка находится в A. Соединяем C с A. Я утверждаю, что CA пересекает кривую под прямым углом или что окружность, проведенная вокруг C радиусом CA, касается кривой; но при этом обнаружится, что касание происходит с внешней стороны, а не с внутренней, как в точках поверх основания. Действительно, повторив рассмотренное выше построение, мы опять придем к неравенству

$$\angle ECH > \angle CEH.$$

Тем более

$$\angle ECH + \angle HCB > \angle CEH - \angle HEB,$$

т. е.

$$\angle ECB > \angle CEB,$$

следовательно,

$$EB > CB,$$

но

$$EB=AC=CF,$$

таким образом,

$$CF>CB,$$

т. е. точка F находится вне кривой NAB, считая от центра.

Точно так же можно показать, что

$$\angle LVC>\angle LCV.$$

Следовательно, $\angle CVP$, дополняющий $\angle LVC$ до двух прямых, меньше $\angle VCD$, тем более

$$\angle VCD+\angle DCN>\angle CVP-\angle PVN,$$

т. е.

$$\angle VCN>\angle CVN,$$

или сторона

$$VN>CN;$$

но

$$VN=AC=CM.$$

Следовательно,

$$CM>CN,$$

т. е. точка M лежит вне кривой NAB, считая от центра. Таким образом, установлено, что дуга круга MAF касается кривой в точке A, что и требовалось доказать.

Если, наконец, точка кривой, в которой надо провести касательную, лежит как раз на пересечении кривой и основания, то перпендикуляр к основанию будет искомой касательной, что легко доказать.

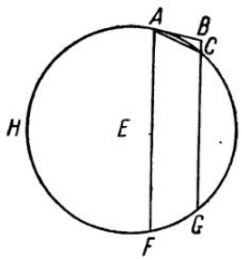
Предложение XVI

Круг с центром в E (фиг. 26) пересечен двумя параллельными линиями AF и BG таким образом, что либо обе параллели лежат по одну сторону от центра, либо одна из них AF проходит через центр. В точке A, где *более близкая к центру кривая пересекает круг, строят касательную к кругу. Я утверждаю, что отрезок касательной AB между параллелями меньше, чем дуга AC между теми же параллелями.*

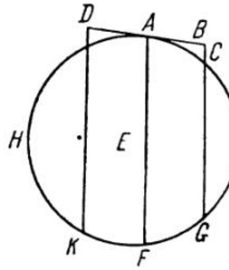
Проводим хорду AC. Угол BAF или острый, или прямой. Следовательно, угол ABC или тупой, или прямой. Следовательно, в треугольнике ABC сторона AC больше стороны AB. Но дуга AC больше хорды AC, следовательно, отрезок касательной AB меньше дуги AC.

Предложение XVII

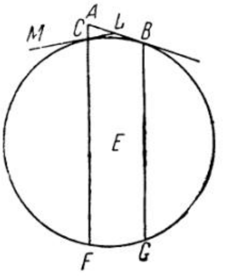
Пусть круг при тех же условиях пересекается еще третьей параллелью DK (фиг. 27). Эта параллель отстоит



Фиг. 26.



Фиг. 27.



Фиг. 28.

от более близкой к центру AF на такое же расстояние, как AF от BG. Тогда отрезок касательной AD между третьей параллелью и средней меньше дуги AC, заключенной между двумя первыми параллелями. Это непосредственно ясно, так как $AD = AB$, а $AB <$ дуги AC по предыдущему предложению.

Предложение XVIII

Круг с центром в E пересекается двумя параллелями AF и BG (фиг. 28), обе параллели могут быть на одинаковых или разных расстояниях от центра. Одна из них, *при разных расстояниях от центра именно та, которая отстоит от центра на большее расстояние, пересекает окружность в B. В B строим касательную к кругу. Тогда отрезок AB касательной между двумя параллельными больше, чем дуга BC между ними.*

Строим касательную к кругу в точке C. Она пересекает касательную AB в точке L. В треугольнике ACL $\angle ACL = \angle MCF$. При нашем выборе точки B $\angle BAF \leqslant \angle MCF$, или, что то же самое,

$$\angle LAC \leqslant \angle ACL.$$

Следовательно, сторона CL меньше или равна стороне AL; тогда

$$CL + BL \leqslant AL + BL = AB,$$

но

$$CL + BL > \smile CB.$$

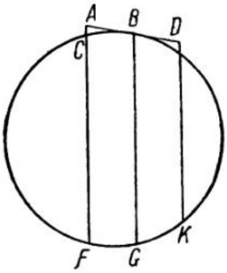
Тем более

$$AB > \smile CB,$$

что и требовалось доказать.

Предложение XIX

Пусть круг (фиг. 29) при тех же предположениях, что и в предыдущей теореме, пересекается еще и третьей параллелью DK. Ее расстояние от параллели BG, более удаленной от центра, то же, что и расстояние BG от AF. Строим в точке B касательную к кругу; тогда отрезок этой касательной между параллелями BG и DK больше дуги BC.

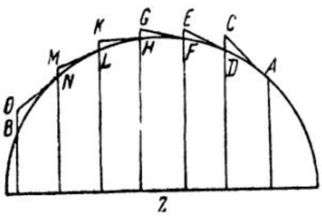


Фиг. 29.

Это очевидно, так как $BD = AB$, а AB по предыдущему предложению больше дуги BC.

Предложение XX

Пусть AB — дуга, меньшая полуокружности (фиг. 30) пересечена произвольным числом параллельных линий, равно отстоящих как друг от друга, так и от параллелей, проведенных через конечные точки A и B. Проводим к дуге AB в точке A и во всех последовательных точках пересечения дуги с параллелями касательные: все в одном направлении и каждую касательную от точки касания до пересечения со следующей параллелью, как на рисунке, AC, DE, FG, HK, и т. д. Я утверждаю, что сумма всех этих отрезков касательных, кроме первого AC, меньше данной дуги AB, а сумма всех отрезков, включая первый AC, больше дуги AB, уменьшенной на величину последнего отрезка дуги NB, т. е. больше дуги AN.



Фиг. 30.

Пусть параллели расположены по обе стороны от центра Z и пусть GH — та параллель, которая либо проходит через центр, либо всего к нему ближе из всех параллелей, лежащих между B и центром. Тогда по предложению XVI каждый из отрезков касательных между GH и BO (каковы HK, LM, NO) меньше, чем соответствующий отрезок дуги. Далее, по предложению XVII, касательная GF меньше дуги FD.

Подобным же образом касательная ED меньше дуги AD. Сумма всех касательных между BO и CD меньше суммы дуг BH и FA. Тем более она меньше суммы дуг BH и HA, т. е. дуги AB, что надо было доказать в первую очередь.

Докажем теперь, что сумма всех касательных, заключенных между BO и A, больше дуги AN.

Возможны следующие случаи: или параллель GH ближе к центру, чем параллель EF, о которой мы полагаем, что она ближайшая к центру со стороны A, или она дальше, или обе параллели находятся на равном расстоянии от центра.

Если EF дальше от центра, чем GH, или на том же расстоянии, то отрезок касательной FG больше соответствующей дуги FH, и прочие отрезки касательных со стороны A, т. е. ED и CA, больше соответствующих дуг (по предложению XVIII); следовательно, сумма касательных $GF+ED+CA$ больше дуги HA. Но и касательная LM больше дуги HL (по предложению XIX), и касательная ON больше дуги NL.

Следовательно, сумма всех касательных, кроме HK, больше дуги AN. Если прибавить еще касательную HK, то тем более сумма всех касательных будет больше дуги AN.

Если GH дальше от центра, чем EF, то касательная KH больше дуги HF (по предложению XIX), касательная ML больше дуги LH, касательная ON больше дуги NL.

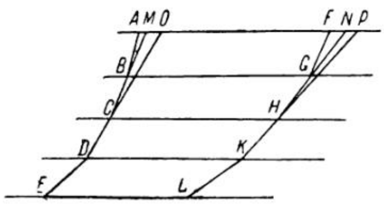
Отсюда мы выводим, что сумма касательных ON, ML и KH больше дуги NF; с другой стороны, касательная ED больше дуги FD и CA больше дуги DA (по предложению XVIII). Следовательно, сумма всех касательных, заключенных между BO и A, кроме GF, больше дуги AN. И тем более сумма всех касательных, включая GF, больше дуги AN.

Из приведенного ясно доказательство для всех других случаев, какую бы дугу полукруга мы ни выбрали. Или доказательство будет совпадать с предыдущим, или потребуется только часть предыдущего доказательства.

Предложение XXI

Пусть тело падает непрерывным движением по произвольному числу соединенных в стык наклонных плоскостей и затем второй раз с той же высоты по такому же числу других наклонных плоскостей. Каждая из этих плоскостей имеет ту же высоту, как соответствующая плоскость при первом падении, но каждая из них имеет больший *наклон к горизонту, чем в первом случае. Я утверждаю, что время падения по более крутым плоскостям меньше, чем время падения по более пологим.*

Пусть $ABCDE$ и $FGHKL$ (фиг. 31) два ряда соединенных в стык наклонных плоскостей, расположенных между теми же горизонтальными параллелями, и соответственные отдельные наклонные плоскости также расположены между одинаковыми горизонтальными параллелями. Каждая из наклонных плоскостей ряда $ABCDE$ круче соответственной наклонной плоскости ряда $FGHKL$. Я утверждаю, что падение вдоль $ABCDE$ произойдет в более короткое время, чем падение вдоль $FGHKL$.

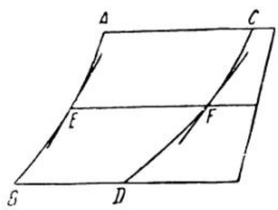


Фиг. 31.

Прежде всего очевидно, что падение вдоль AB совершается в меньшее время, чем падение вдоль FG; эти времена падения относятся, как AB к FG (предложение VII), причем $AB < FG$ ввиду менее наклонного положения AB. Теперь продолжают вверх прямые CB и HG до пересечения с прямой AF в точках M и N. Тогда тело пробегает путь BC после падения вдоль AB в то же время, как и после падения вдоль MB, потому что в обоих случаях оно будет иметь в B одну и ту же скорость (по предложению VI). То же относится и к падению вдоль GH. Оно совершается в то же время, все равно, пришло ли тело в G по пути FG или NG. Но время падения вдоль BC, после пробега MB, относится к времени падения вдоль GH, после пробега NG, как длина BC к GH или MC к NH. Действительно, таково отношение времен падения вдоль всех длин MC и NH и вдоль частей длины MB и NG (по предложению VII). Следовательно, и таково же отношение разностей обоих времен, т. е. времен падения по BC и GH.

Но длина BC меньше длины GH вследствие большей крутизны BC. Поэтому время падения вдоль BC после пробега AB или MB короче времени падения вдоль GH после пробега NG или FG.

Таким же способом, продолжив линии DC и KH вверх до пересечения с AF в точках O и P, можно показать, что тело падает вдоль CD, после пробега ABC или OC, в более короткое время, чем вдоль HK, после пробега FGH или PH. Наконец, падение вдоль DE после пробега $ABCD$ совершается в более короткое время, чем падение вдоль KL после пробега $FGHK$.



Фиг. 32.

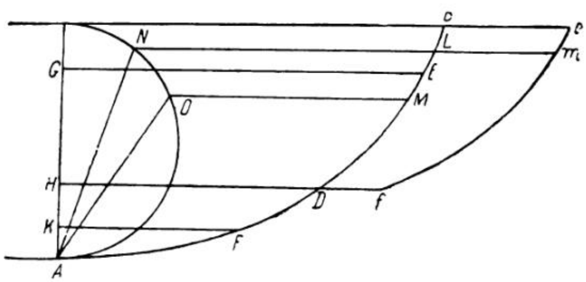
Вследствие этого и все время падения вдоль $ABCDE$ будет короче, чем время падения вдоль $FGHKL$.

Так как кривые линии можно представить себе состоящими из бесконечно большого числа бесконечно малых отрезков прямых, то можно применить теорему к кривым поверхностям. Если две поверхности искривлены согласно двум кривым одинаковой высоты и если одна кривая в каждой точке круче, чем другая кривая на той же высоте, то тело вдоль более крутой кривой упадет в более короткое время, чем по более пологой. Пусть, например (фиг. 32) обе поверхности искривлены по кривым AB и CD одинаковой высоты и пусть для любых точек E и F, взятых на одной высоте, наклон CD всегда больше наклона AB, другими словами, касательная к кривой CD в F более наклонена к горизонту, чем касательная к AB в E. Тогда время падения вдоль AB будет короче времени падения вдоль CD. То же самое остается справедливым, если одна из линий прямая. Нужно только, чтобы наклон прямой, который во всех точках один и тот же, был бы больше или меньше, чем наклон кривой в любой точке.

Предложение XXII

Дана циклоида с вертикальной осью и с вершиной, обращенной вниз. На ней дано два отрезка одинаковой высоты. Из них один ближе к вершине, чем другой. Тогда время падения вдоль вышележащего отрезка короче, чем время падения вдоль нижележащего отрезка.

Пусть (фиг. 33) AB — циклоида, AC — ее вертикальная ось, вершина A направлена вниз. Возьмем на циклоиде два



Фиг. 33.

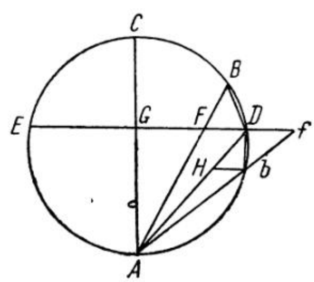
отрезка BD и EF, одинаковой высоты; т. е. расстояние между горизонтальными параллелями BC и DH, между которыми заключен вышележащий отрезок BD, равно расстоянию между горизонтальными параллелями EG и FK, между которыми заключен нижележащий отрезок EF.

Я утверждаю, что падение вдоль дуги BD совершается в более короткое время, чем падение вдоль дуги EF. Для доказательства берем на BD какую-нибудь точку L и на EF точку M, такую, чтобы E было настолько же выше M, насколько B выше L. Описываем полуокружность вокруг оси AC. Через L и M проводят горизонтальные линии, которые пересекают полуокружность в точках N и O. Соединяют N и O с A, тогда точка N выше точки O, следовательно, прямая NA круче прямой OA. Но (по предложению XV) прямая NA параллельна касательной к циклоиде в точке L, а OA параллельна касательной к циклоиде в точке M. Следовательно, кривая BD в точке L круче, чем кривая EF в точке M.

Представим себе отрезок EF поднятым без изменения наклона вверх, например, в положение ef, при котором отрезок ef заключен между теми же параллелями, что и BD, тогда точка M займет положение m и будет на одной высоте с точкой L; итак, крутизна кривой B в точке L больше крутизны кривой ef в точке m, находящейся на той же высоте. Последняя крутизна равна крутизне в точке M кривой EF. Это же рассуждение можно повторить для любой точки кривой ef и показать, что ее крутизна меньше крутизны кривой BD в соответствующей точке, и, таким образом, доказать, что падение вдоль BD должно совершаться в более короткое время, чем падение вдоль ef, а следовательно, и падение вдоль EF, что и требовалось доказать.

Лемма

Дан круг (фиг. 34) с диаметром AC. Хорда ED перпендикулярна к AC. Из A проводят прямую, пересекающую круг в некоторой точке B, а хорду в точке F. Я утверждаю, что величина AD — средняя пропорциональная между величинами AB и AF.[32]



Фиг. 34.

Предположим, во-первых, что точка F лежит внутри круга.

Проводим хорду, соответствующую дуге BD. Дуги AE и AD равны. Следовательно, равны и вписанные углы EDA и ABD, опирающиеся на эти дуги.

По той же причине в треугольниках ABD и ADF равны углы ABD и ADF. Кроме того, у них общий угол A. Следовательно, эти треугольники подобны. Отсюда

$$BA : AD = AD : AF.$$

Допустим, во-вторых, что точка пересечения f лежит вне круга. Проводим через b линию, параллельную DE; она пересечет AD в H. Тогда, согласно уже доказанному, мы имеем

$$\frac{DA}{Ab} = \frac{Ab}{AH}$$

или

$$\frac{DA}{Ab} = \frac{Af}{AD},$$

т. е.

$$\frac{Ab}{AD} = \frac{AD}{Af},$$

таким образом, лемма доказана.

Предложение XXIII

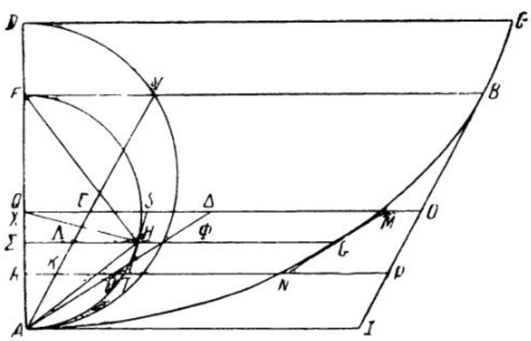
Пусть (фиг. 35) ABC — циклоида с вершиной A, направленной вниз, и вертикальной осью AD; через произвольную точку циклоиды B проводим вниз касательную, пересекающую горизонтальную линию, проведенную через A в точке I. Перпендикуляр, опущенный из B на ось, пересекает AD в точке F. Вокруг AF как диаметра строим полуокружность FHA с центром в X. На дуге циклоиды BA берем произвольную точку G; через нее проводим горизонтальную линию ΣG, пересекающую окружность в точке H и ось в точке Σ.

В точке G построим касательную к циклоиде, в точке H — касательную к кругу и будем рассматривать части этих касательных MN и ST, заключенные между теми же параллельными линиями MS и NT. Пусть те же линии MS и NT вырезают из касательной BI часть OP и из оси AD часть QR. Я утверждаю, что время τ_1, в течение которого тело пройдет путь MN с постоянной скоростью v_1, равной скорости, достигаемой при падении вдоль дуги циклоиды BG, относится к времени τ_2, в течение которого тело пройдет путь OP с постоянной скоростью v_2, равной половине ско

рости, приобретаемой телом в I после падения вдоль всей касательной BI, как длина касательной ST к расстоянию QR на оси.

$$\tau_1 : \tau_2 = ST : QR.$$

Для доказательства строим на AD как диаметре полукруг DVA, который пересечет $G\Sigma$ в Φ и BF в V. Проводим



Фиг. 35.

прямую AV, пересекающую прямые OQ, PR и $G\Sigma$ в точках E, K и Λ. Проводим прямые HF, HX, HA и $A\Phi$. Последняя пересекает прямые OQ и PR в точках Δ и Π.

Мы имеем

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{MN}{OP} \cdot \frac{v_2}{v_1}$$

(по теореме 5: Галилей о равномерном движении [33]).

Скорость, которую тело приобретает благодаря падению вдоль BI, равна скорости вертикального падения вдоль FA, следовательно, и половина первой скорости, т. е. v_2, равна половине второй скорости. Скорость v_1, которую тело приобретает при падении вдоль BG по предложению VIII, равна скорости, приобретаемой при падении вдоль $F\Sigma$. По предложению III имеем:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{FA}}{\sqrt{F\Sigma}} = \frac{\frac{1}{2}FA}{FH} = \frac{FX}{FH},$$

следовательно,

$$\frac{\tau_1}{\tau_2}=\frac{MH}{OP}\cdot\frac{FX}{FH}.$$

Далее, касательная BI параллельна VA, а касательная MGN параллельна ΦA, отсюда $MN=\Delta\Pi$; $OP=EK$. Следовательно,

$$\frac{MN}{OP}=\frac{\Delta\Pi}{EK}=\frac{\Delta A}{EA}=\frac{\Phi A}{\Lambda A}=\frac{VA}{\Phi A}.$$

Последнее по предыдущей лемме. Сверх того

$$\overline{VA}^2=AD\cdot AF,$$

$$\overline{\Phi A}^2=AD\cdot A\Sigma,$$

т. е.

$$\frac{VA^2}{\Phi A^2}=\frac{AF}{A\Sigma}=\frac{AF^2}{AF\cdot A\Sigma}=\frac{AF^2}{AH^2}.$$

Отсюда

$$\frac{MN}{OP}=\frac{VA}{\Phi A}=\frac{AF}{AH}.$$

Ввиду подобия треугольников FAH и $FH\Sigma$ это отношение равно $FH:H\Sigma$. Подставляя это в отношение времен, получаем

$$\frac{\tau_1}{\tau_2}=\frac{FH}{H\Sigma}\cdot\frac{FX}{FH}=\frac{FX}{H\Sigma}.$$

Но

$$\frac{FX}{H\Sigma}=\frac{HX}{H\Sigma}=\frac{ST}{QR},$$

как легко видеть.

Окончательно

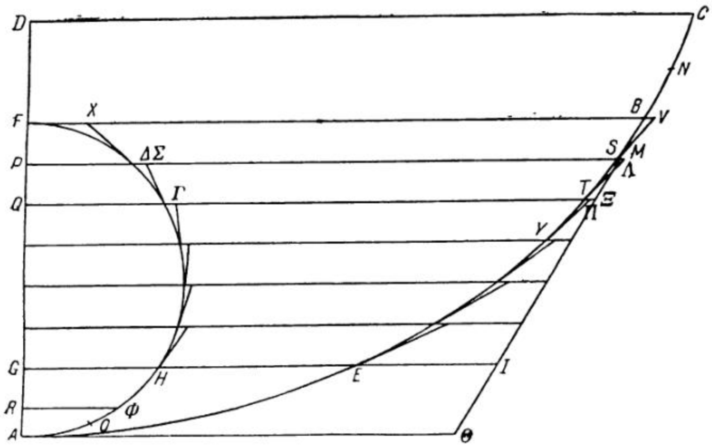
$$\tau_1:\tau_2=ST:QR,$$

что и требовалось доказать.

Предложение XXIV

Рассмотрим снова, как в предыдущей теореме, циклоиду ABC (фиг. 36) с вертикальной осью AD и вершиной A, обращенной вниз.

Через произвольную точку циклоиды B проведена касательная, направленная вниз, пересекающая горизонтальную линию $A\Theta$ в точке Θ. Перпендикуляр, опущенный из B на ось AD, пересекает последнюю в F. На FA как на диаметре строят полуокружность. Проводят какую-нибудь линию параллельную FB. Пусть она пересекает циклоиду в E, пря-



Фиг. 36.

мую $B\Theta$ в I, круг H и ось циклоиды в G. Я утверждаю, что t_1, время падения вдоль дуги циклоиды BE относится ко времени t_2, в течение которого тело проходит расстояние BI с постоянной скоростью v_2, равной половине скорости, приобретаемой после падения вдоль $B\Theta$, как дуга FH к прямой FG, т. е.

$$t_1 : t_2 = \smile FH : FG.^{34}$$

Допустим, что наше утверждение неверно. Тогда отношение $t_1 : t_2$ должно быть либо больше, либо меньше, чем отношение дуги FH к прямой FG. Пусть оно будет больше.

Тогда должно существовать t_3 такое, что

$$t_3 : t_1 = \smile FH : FG,$$

при этом $t_3 < t_1$.

Возьмем некоторую точку N на циклоиде выше точки B. Тогда тело скорее пройдет путь BE, если оно начало падение в N, чем если оно начнет падение в B из состояния покоя, т. е. время падения вдоль BE после падения вдоль NB, будет меньше, чем t_1. Очевидно, можно сделать разность между обоими временами падения произвольно малой, достаточно приблизив N к B. Выберем N таким образом, чтобы разность времен падения была меньше $t_1 - t_3$. Тогда t_4 — время падения вдоль BE после падения вдоль NB — будет больше t_3, следовательно,

$$t_4 : t_2 > \smile FH : FG.$$

Пусть точка O выбрана таким образом, чтобы

$$t_4 : t_2 = \smile FHO : FG.$$

Делим FG на m равных частей $FP = PQ$, и т. д. и пусть каждая часть меньше, чем высота дуги BN, и меньше, чем высота дуги HO; очевидно, это всегда возможно. Через все точки деления проводим линии, параллельные основанию DC до пересечения с касательной $B\Theta$ в точках Λ, Ξ, и т. д. В точках Δ, Γ, и т. д. пересечения параллельных линий с окружностью строят касательные ΔX, $\Gamma\Sigma$, и т. д. все направленные вверх, до пересечения с ближайшей сверху параллельной линией. Точно так же во всех точках пересечения параллельных линий с циклоидой строятся касательные, направленные вверх, до пересечения с ближайшей сверху параллельной линией, например, SV, TM, и т. д. Затем откладывают на GA отрезок $GR = FP = \frac{1}{m} FG$ и через R проводят линию, параллельную DC. Она пересечет полуокружность между H и O в точке Φ, так как GR меньше высоты точки H над O. После этого поведем доказательство следующим образом.

Время α_1, в течение которого тело проходит путь VS с постоянной скоростью, приобретенной при падении вдоль BS, больше времени, в течение которого проходится дуга BS ускоренным движением после падения вдоль NB, ибо скорость после падения вдоль BS меньше скорости после падения вдоль NB, так как высота BS меньше высоты NB. Кроме того, скорость пробега по VS мы предположим постоянной, а скорость вдоль BS после падения вдоль NB будет возрастать; наконец, дуга BS короче касательной VS и во всех точках круга ее.

По всем этим причинам время, необходимое для пробега VS с постоянной скоростью, приобретаемой при падении вдоль BS, короче времени падения вдоль BS после пробега NB. Равным образом, время β_1, в течение которого тело проходит касательную MT с постоянной скоростью, приобретенной после падения вдоль BT, больше времени, в течение которого происходит падение вдоль дуги ST, после пробега дуги NS.

По тем же причинам и время γ_1, необходимое для падения вдоль касательной ΠY со скоростью, приобретаемой при падении вдоль BY, больше времени, в течение которого тело падает вдоль TY после падения вдоль NT.

Таким образом, и сумма $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \cdots$ времен пробега по всем касательным до самой нижней, касающейся циклоиды в E (причем каждая касательная пробегается с той скоростью, которую тело приобретает при падении из точки B до соответственной точки касания циклоиды), будет больше времени t_4, в течение которого тело падает вдоль дуги BE после падения вдоль NB.

Теперь мы, однако, покажем, что эта же сумма должна быть меньше, чем t_4.

Рассмотрим снова те же промежутки времени $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \cdots$ Время α_1, в течение которого проходится отрезок касательной VS, со скоростью, приобретенной при падении вдоль BS, относится ко времени α_2, в течение которого проходится путь $B\Lambda$ со скоростью v_2, равной половине скорости, приобретаемой телом при падении вдоль FA, как отрезок касательной к кругу $\Delta X = a$, к отрезку на оси $FP = a_2$ (по предыдущему предложению).

Точно так же время β_1, в течение которого тело проходит касательную MT со скоростью, приобретаемой при падении вдоль BT, относится ко времени β_2, в течение которого тело пробегает прямую $\Lambda\Xi$ со скоростью v_2, как касательная $\Gamma\Sigma = b$, к отрезку оси $PQ = b_2$. И так далее. Каждое из времен, необходимых для пробега одной из касательных к циклоиде со скоростью, определенной как выше указано, относится ко времени пробега соответственного отрезка касательной BI со скоростью, равной половине скорости, приобретаемой при падении вдоль $B\Theta$, как касательная к окружности, взятая между теми же параллельными линиями, относится к соответствующему отрезку прямой FG.

Таким образом, мы получаем следующие m пропорций:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{a_1}{a_2}, \qquad \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{b_1}{b_2} \ldots .$$

Знаменатели левых отношений α_2, $\beta_2 \ldots$ обозначают времена, в течение которых проходятся равные отрезки $B\Lambda$, $\Lambda\Xi \ldots$, взятые на касательной BI с постоянной скоростью v_2, т. е. все знаменатели равны. То же относится ко всем знаменателям правых отношений, равным $\frac{FG}{m}$. Разделим все пропорции на m. Тогда все знаменатели слева равны t_2, т. е. времени, в течение которого пробегается весь путь BI со скоростью v_2.

Все знаменатели правых отношений будут равны FG. Сложим все пропорции

$$\frac{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \ldots}{t_2} = \frac{a_1 + b_1 + e_1 + \ldots}{FG}.$$

По предложению XX числитель правой стороны, представляющий сумму касательных к кругу, ΔX, $\Gamma\Sigma$, и т. д. меньше, чем дуга $F\Phi$; тем более он меньше дуги FO.

Имеем

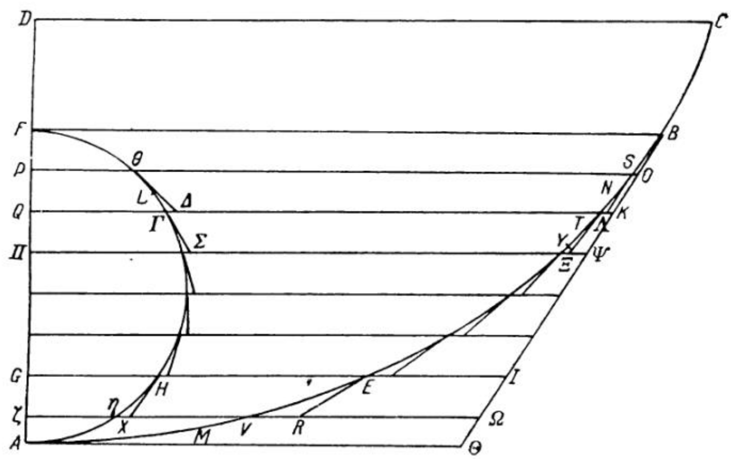
$$\frac{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1+\ldots}{t_2}<\frac{\smile FO}{FG}.$$

С другой стороны, по нашему предположению,

$$\frac{t_4}{t_2}=\frac{\smile FO}{FG},$$

следовательно,

$$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1+\ldots<t_4.$$



Фиг. 37.

Мы пришли к нелепости, так как выше показали, что эта сумма должна быть больше t_4.

Итак, наше предположение $t_1:t_2>\smile FH:FG$ неверно. Отношение $t_1:t_2$ не может быть больше отношения дуги FH к прямой FG.

Испытаем предположение $t_1:t_2<\smile FH:FG$, если это возможно. Тогда существует такое t_5, большее, чем t_1, что

$$t_5:t_2=\smile FH:FG.$$

Определяют (фиг. 37) на циклоиде две точки, M и N, таким образом, чтобы дуге MN соответствовала та же высота, что и дуге BE, но точка N лежит ниже точки B. Тогда падение вдоль NM будет совершаться медленнее, чем падение вдоль BE (предложение XXII). Но можно сделать разницу во временах падения сколь угодно малой, выбрав точку N достаточно близко к B. Сделаем разность во временах падения меньше $t_5 - t_1$, тогда t_6 — время падения вдоль NM — будет удовлетворять неравенству $t_6 - t_2 < \smile FH : FG$.

Определим на круге такую точку L, чтобы

$$t_6 : t_2 = \smile LH : FG.$$

Делим FG на n равных частей FP, $PQ\ldots$, таких, чтобы высота каждой части, т. е. $\frac{FG}{n}$, была бы меньше высоты дуги циклоиды BN и одновременно меньше высоты дуги круга FL. От G в направлении к A наносим еще одну такую часть $G\zeta$ и через все точки деления проводят линии, параллельные основанию до пересечения с прямой $B\theta$ в точках O, K и т. д. Через ζ также проводят параллельную линию, пересекающую $B\theta$ в Ω, циклоиду в V и окружность в η. В точках θ, Γ и т. д., в которых параллели пересекают окружность FH, проводят касательные к окружности, направленные вниз и до пересечения с ближайшей снизу параллелью, как $\theta\Delta$, $\Gamma\Sigma$, и т. д. Самая нижняя касательная к кругу в точке H пересекает $\zeta\Omega$ в точке X. Строят также касательные в местах пересечения циклоиды с параллелями, направленные также вниз до пересечения со следующей снизу параллелью, как $S\Lambda$, $T\Xi$, и т. д., последняя ER пересекает линию $\zeta\Omega$ в точке R.

Так как отрезок $P\zeta = FG$, т. е. равен высоте дуги BE, и так как эта высота по построению = высоте NM, то и отрезок $P\zeta$ равен высоте NM. Но параллель PO лежит выше точки N, следовательно, и прямая $\zeta\Omega$ и точка V на ней лежат выше точки M. Падение по SV будет совершаться в более короткое время, чем падение вдоль NM, совершающееся во время t_6 (по предложению XXII). Время α_3, в течение которого тело пройдет отрезок касательной $S\Lambda$ с постоянной скоростью, приобретаемой при падении вдоль дуги BS, короче, чем время падения вдоль дуги ST, потому что скорость, приобретаемая при падении вдоль BS, с которой проходится весь путь $S\Lambda$, при падении вдоль ST достигается только в конце (по предложению VIII). Кроме того, отрезок $S\Lambda$ короче ST. Так же точно время β_3, в течение которого проходятся касательная $T\Xi$ со скоростью, приобретаемой при падении по BT, также короче времени прохождения ускоренным движением дуги TY после падения через ST, ибо скорость, приобретаемая после падения вдоль BT, и с которой проходится весь путь $T\Xi$, равна скорости при падении вдоль SY; но тело при падении по TY приобретает эту скорость только в самый последний момент, кроме того, путь $T\Xi$ короче дуги TY, и т. д.

Итак, если тело последовательно пробегает все отрезки касательных, каждый, со скоростью приобретаемой при падении от точки B до точки касания данного отрезка касательной, и если сложить все времена α_3, $\beta_3, \ldots$, то сумма будет меньше времени падения по дуге SV. Сейчас мы, однако, покажем, что эта сумма должна быть вместе с тем и больше того же промежутка времени.

Действительно, время α_3, в течение которого тело пробегает $S\Lambda$ с постоянной скоростью, равной скорости, приобретаемой при падении вдоль BS, относится ко времени α_4 пробега пути OK со скоростью v_2, равной половине скорости, приобретаемой при падении $B\theta$, как отрезок касательной к кругу $\theta\Delta = a_3$ к отрезку на оси $PQ = a_4$ (по предыдущему предложению).

Так же точно время β_3, в течение которого проходится касательная $T\Xi$ со скоростью, приобретаемой при падении вдоль BT, относится ко времени β_4, в течение которого проходится путь $K\psi$ со скоростью v_2, как касательная $\Gamma\Sigma = b_3$ к отрезку оси $Q\Pi = b_4$. И так далее. Время, необходимое, чтобы пройти любую касательную к циклоиде, определенную, как выше указано, с постоянной скоростью, равной скорости, приобретаемой при падении вдоль дуги касательной, от точки B до точки касания данной касательной, относится ко времени пробега соответственного отрезка на BI со скоростью v_0, как длина касательной к окружности, взятая между теми же параллелями к соответственному отрезку на оси.

Имеем, таким образом n пропорций:

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_4} = \frac{a_3}{a_4}; \qquad \frac{\beta_3}{\beta_4} = \frac{b_3}{b_4} \ldots .$$

здесь

$$\alpha_4 = \beta_4 = \ldots = \frac{t_2}{n};$$

$$a_4 = b_4 = \ldots = \frac{FG}{n}.$$

Делим все пропорции на n и складываем. Это дает

$$\frac{\alpha_3 + \beta_3 + \ldots}{t_2} = \frac{a_3 + b_3 + \ldots}{FG}.$$

Теперь

$$a_3 + b_3 + \ldots > \smile \theta H$$

(по предложению XX), тем более

$$\smile LH < a_3 + b_3 + \ldots$$

Ранее мы имели соотношение

$$t_6 : t_2 = \smile LH : FG.$$

Отсюда

$$\alpha_3 + \beta_3 + \ldots > t_6.$$

t_6 есть время падения вдоль NM; время падения вдоль SV короче, следовательно, тем более $\alpha_3 + \beta_3 + \ldots$ больше времени падения вдоль SV.

Мы опять пришли к противоречию, так как ранее мы вывели, что эта сумма меньше времени падения вдоль SV.

Очевидно отношение времени падения по дуге циклоиды BE ко времени пробега касательной BI с постоянной скоростью, равной половине скорости, приобретаемой при падении вдоль $B\theta$, не может быть меньше отношения длины дуги FH к прямой FG.

Но равным образом было показано, что то же отношение времен не может быть и больше отношения длины дуги FH к FG. Поэтому эти отношения должны быть равны.

$$t_1 : t_2 = \smile FH : FG,$$

что и требовалось доказать.

Предложение XXV

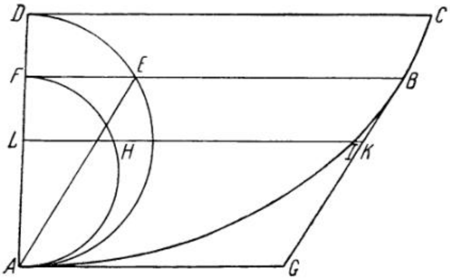
Пусть тело падает по циклоиде с вертикальной осью и вершиной, обращенной вниз, начиная с некоторой точки на циклоиде, тогда время падения до вершины циклоиды всегда одно и то же, независимо от положения на циклоиде начальной точки движения; это время относится ко времени свободного падения вдоль всей оси циклоиды, как длина полуокружности к диаметру ее.

Пусть (фиг. 38) ABC — циклоида с вертикальной осью AD и вершиной A. Из любой точки циклоиды, например из B, падает тело только под влиянием тяжести по дуге AB или по поверхности, так же изогнутой. Я утверждаю, что T_1, время падения по этой кривой до точки A, относится к T_2, времени падения по DA, как длина полуокружности к ее диаметру.

Если это будет доказано, то тем самым будет показано, что времена падения по произвольным дугам циклоиды, кончающимся в A, но начинающимся от любой точки циклоиды, равны между собой.

Строим полуокружность на DA как диаметре; через B проводим линию, параллельную основанию циклоиды, — она пересекает ось в точке F и окружность в точке E. Соединяем E с A и проводим через B линию BG, параллельную AE. Наконец, строим полуокружность на AF, как на диаметре.

Тогда по предыдущему предложению T_1, время падения вдоль BA, относится к T_2, времени пробега телом расстояния BG со скоростью v_2, равной половине скорости, приобретаемой при падении по BG, как длина полуокружности FHA к прямой FA. Но время, в течение которого тело проходит BG с постоянной скоростью v_2, как раз равно времени, в течение которого тело падает по тому же BG или по EA, так как EA равно и параллельно BG. Но время падения по EA равно времени T_2 падения по оси DA (по теореме VI „Ускоренного движения" Галилея).[35]



Фиг. 38.

Поэтому и время T_1 падения по дуге циклоиды BA относится ко времени T_2 падения по оси FA, как длина полуокружности, построенной на FA как диаметре, к длине ее диаметра.

Если начертить всю циклоиду, то тело после падения вдоль BA будет продолжать свое движение и подымется по другую сторону на дугу, равную дуге BA (по предложению IX). Для этого потребуется столько же времени, как и для падения вдоль BA (по предложению XI), потом тело через A вернется в B, и время, потребное для каждого из таких колебаний, независимо от того, проходятся ли бóльшие или малые дуги циклоиды, всегда будет относиться ко времени падения вдоль оси DA, как длина целой окружности к ее диаметру.[36]

Предложение XXVI

Повторяем построение предыдущего предложения и прибавляем еще одну горизонтальную линию, которая пересе-

кает циклоиду в I и полукруг FHA в H. Тогда время T падения вдоль BI относится ко времени T', в течение которого тело, после падения вдоль BI проходит дугу IA, как дуга круга FH к дуге круга HA.

Пусть HI пересекает касательную BG в точке K и ось DA в точке L, тогда t_1, время падения вдоль дуги BA, относится к t_2, времени прохождения BG со скоростью v_2, равной половине скорости, приобретаемой при падении вдоль BG, как дуга FHA к прямой FA (по предложению XXIV):

$$t_1 : t_2 = \smile FHA : FA.$$

Но время t_2, в течение которого проходится BG со скоростью v_2, относится ко времени t_3, в течение которого проходится BK, с той же скоростью, как длины путей.

$$t_2 : t_3 = BG : BK.$$

Отсюда

$$t_2 : t_3 = FA : FL.$$

Наконец, время t_3 относится ко времени T падения вдоль BI, как FL к $\smile FH$.

$$t_3 : T = FL : FH.$$

Перемножение трех пропорций дает:

$$t_1 : T = \smile FHA : \smile FH.$$

Вычитаем единицу с каждой стороны

$$(t_1 - T) : T = T' : T = \smile HA : \smile FH,$$

или окончательно

$$T : T' = \smile FH : \smile HA,$$

что и требовалось доказать.

ТРЕТЬЯ ЧАСТЬ „МАЯТНИКОВЫХ ЧАСОВ“

О развертке и измерении кривых

Определения

I

Кривая называется изогнутой в одну сторону, если все ее касательные касаются ее с одной и той же стороны. Если у кривой есть прямолинейные части, то эти части, будучи продолжены, сами рассматриваются как касательные.

II

Если две кривые этого рода исходят из той же точки и если выпуклость одной обращена к вогнутости другой, как у кривых ABC и ADE (фиг. 39), то обе они называются „вогнутыми“ в ту же сторону.

III

Представим себе, что кривая, изогнутая в одну сторону, обвернута ниткой или гибкой линией. Если, закрепив один конец нитки на кривой, удалять от нее другой конец таким образом, чтобы свободная часть нити была бы всегда натянута, то свободный конец нити, очевидно, опишет новую кривую; назовем эту кривую эвольвентой.[37]

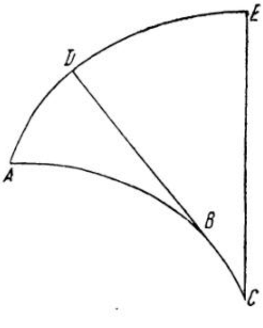
IV

А ту кривую, вокруг которой обвернута лента, назовем эволютой. На предшествующей фигуре (фиг. 39) ABC — эволюта, ADE — эвольвента от ABC. Когда конец нити переместится из точки A в точку D, часть нити DB будет туго натянута, а часть BC будет еще лежать на кривой. Очевидно, прямая DB касается эволюты в точке B.

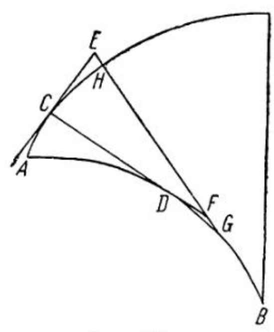
Предложение I

Каждая касательная к эволюте пересекает эвольвенту под прямым углом.

Пусть (фиг. 40) AB — эволюта, AH — ее эвольвента. Прямая FDC касается эволюты в точке D и пересекает эволь-



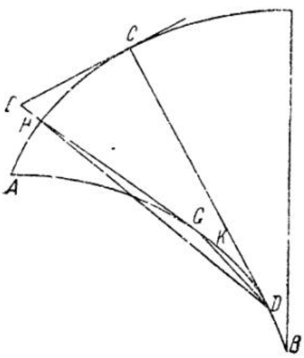
Фиг. 39.



Фиг. 40.

венту в точке C. Я утверждаю, что пересечение происходит под прямым углом, т. е. что перпендикуляр к CD в точке C есть касательная к эвольвенте AH. Так как прямая DC касается эволюты в точке D, то она, очевидно, представляет положение нити в момент, когда конец нити находится в C. Если мы докажем, что нить при описании всей кривой AH встречает прямую CE только в точке C, то мы одновременно докажем, что CE касается кривой ACH именно в точке C.

Берем на AC еще одну точку H, отличную от C и более отдаленную от начальной точки развертки, чем C. Пусть нить в момент, когда конец ее находится в H, имеет положение BGH; при этом свободная часть нити есть HG, тогда прямая HG касается эволюты AB в точке G. Пока конец кривой описывает дугу CH, нить сматывается с дуги DC.



Фиг. 41.

Продолжение прямой CD пересекает прямую HG в точке F. Линия HG пересекает в точке E прямую CE, тогда $DF + FG > DG$, безразлично, будет ли DG прямая или кривая линия. Прибавим к обеим частям неравенства прямую линию CD, получаем:

$$CF + FG > CD + DG.$$

Но $CD + DG = HG$ по построению. Вычтем из обеих частей прямую FG, это дает $CF > HF$. Вместе с тем $FE > FC$, так как в треугольнике FCE угол C — прямой, следовательно, тем более $FE > FH$, т. е. E лежит вне эвольвенты. Следовательно, нить не встречает прямой CE по другую сторону от C, считая от начала развертки. Предположим теперь (фиг. 41), что точка H расположена ближе к начальной точке A, чем точка C. HG дает положение нити в момент, когда конец ее находится в H. Проводим прямые DG и DH. Пусть линия DH встречает прямую CE в точке E. Очевидно, прямая DG не лежит на продолжении HG, но образуется треугольник DGH. В этом случае прямая или меньше дуги DKG, или же равна ей, если эта часть эволюты — прямая линия. Имеем

$$DG \leq \smile DKG.$$

Прибавляем с каждой стороны неравенства по GH:

$$DG + GH \leq \smile DKG + GH,$$

и, следовательно,

$$DG + GH \leqslant DC,$$

но

$$DH < DG + GH,$$

следовательно,

$$DH < DC.$$

С другой стороны, $DC < DE$, так как в треугольнике DCE угол C прямой, следовательно, тем более $DH < DE$. Итак, точка H лежит внутри угла DCE. Отсюда следует, что и между A и C нить не достигает прямой CE. Следовательно, прямая CE касается эвольвенты AC в точке C, а отсюда далее следует, что прямая DC, к которой CE перпендикулярна, пересекает кривую под прямым углом, что и требовалось доказать.

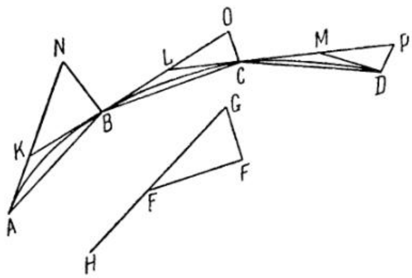
Одновременно отсюда следует, что кривая AHC изогнута в одну сторону и притом вогнута в ту же сторону, что и кривая AGB, эвольвентой которой она является; ибо все касательные к AHC лежат вне площади $DGAHC$, а все касательные к кривой AGD лежат внутри этой площади, т. е. вогнутость кривой AHC обращена к выпуклости кривой AGD.

Предложение II

Дана дуга кривой, ограниченная двумя точками. Кривая изогнута в одну сторону (фиг. 42). Делим кривую на большое число частей. К каждой части проводим хорду в каждой точке деления и в одной конечной точке проводим касательные к кривой, как AN, BO, CP, и в каждой точке деления и в одной конечной точке строим нормали, т. е. перпендикуляры к касательной, как BN, CO, DP. Каждую касательную проводят от точки касания до точки пересечения со следующей нормалью. Составляем для всех частей отношения хорды к последующей нормали, как $AB:BN$, $BC:CO$, $CD:DP$, и т. д.

Я утверждаю, что каждое из этих отношений может быть сделано больше любого произвольно заданного отношения, лишь бы число делений дуги было достаточно велико.

Дано отношение $\frac{EF}{FG}$. Откладываем отрезки EF и FG на стороны прямого угла F и проводим прямую GEH. Пусть части, на которые разделена дуга, так малы, что касательные, построенные в двух соседних точках деления, образуют между собой угол, который больше, чем угол FEH, т. е. каждый из углов AKB, BLC, CMD больше угла FEH. Возможность такого деления очевидна и не нуждается в доказательстве.



Фиг. 42.

Я утверждаю, что при соблюдении этого условия каждое из отношений $\frac{AB}{BN}$, $\frac{BC}{CO}$, $\frac{CD}{DP}$ больше, чем $\frac{EF}{FG}$.

Из неравенства $\angle AKB > \angle HEF$ следует, что угол NKB, дополнение угла AKB, меньше, чем угол GEF.

$$\angle NKB < \angle GEF.$$

Так как треугольники KBN и EFG прямоугольны, то

$$\frac{KB}{BN} > \frac{EF}{FG}.$$ [38]

Но $AB > KB$, так как в треугольнике AKB угол K тупой; действительно, он больше угла HEF, который по построению тупой.

Поэтому

$$\frac{AB}{BN} > \frac{KB}{BN},$$

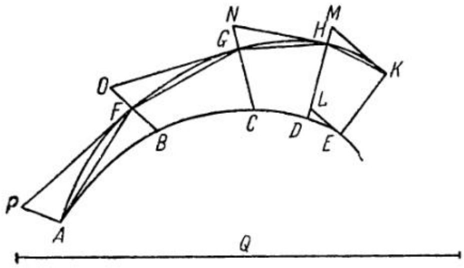
тем более

$$\frac{AB}{BN} > \frac{EF}{FG}.$$

Так же точно можно доказать, что каждое из отношений $\frac{BC}{CO}$ и $\frac{CD}{DP}$ больше отношения $\frac{EF}{FG}$. Таким образом, теорема доказана.

Предложение III

Две кривые, изогнутые в одну сторону, вогнутые в ту же сторону и исходящие из одной точки, не могут обладать одновременно тем свойством, чтобы каждая кривая,



Фиг. 43.

пересекающая одну кривую под прямым углом, пересекала бы также и вторую под прямым углом.

Допустим, что (фиг. 43) ACE и AGK — кривые, обладающие этим свойством. Их общая начальная точка A. Берем на внешней кривой произвольную точку K и проводим через эту точку прямую, пересекающую AGK под прямым углом. Тогда эта прямая должна пересечь кривую ACE в точке E под прямым углом.

Возьмем прямую Q, которая длиннее дуги KGA. Затем, как указано в предыдущей теореме, разделим дугу KGA в точках H, G, F на столько частей, чтобы отношение каждой из хорд KH, HG, GF, FA к последующей нормали

HM, GN, FO, AP было бы больше отношения Q к KE. Тогда и отношение суммы всех хорд к сумме всех нормалей будет больше, чем $Q:KE$.

Продолжим все нормали, пока они встретят вторую кривую ACE в точках D, C, B и притом, согласно предположению, под прямым углом к кривой. Тогда $KE < MD$. Действительно, если мы в точке E восставим перпендикуляр EL к KE, то это будет касательная к ACE и, согласно предположению, она пересечет HD между D и M.

Тогда KE как кратчайшее соединение между параллелями EL и KM короче ML и тем более короче MD. Так же можно показать, что $HD < NC$, $GC < OB$ и $FB < PA$.

Из $PA > FB$ следует $PA + OF > OB$. Так же точно из $OB > GC$ следует $OB + NG > NG$. Но так как $PA + OF > OB$, то тем более $PA + OF + NG > NC$. Далее, из $NC > HD$ следует $NC + MH > MD$. Заменяем NC суммой $PO + OF + NG$, которая больше NC, тогда тем более

$$PA + OF + NG + MH > MD.$$

Так как $MD > KE$, то

$$PA + OF + NG + MH > KE.$$

Но по нашему предположению

$$\frac{AF + FG + GH + HK}{PA + OF + NG + MH} > \frac{Q}{KE}.$$

С тем большим основанием

$$\frac{AF + FG + GH + HK}{KE} > \frac{Q}{KE},$$

т. е.

$$AF + FG + GH + HK > Q,$$

а между тем

$$Q > \smile AGK.$$

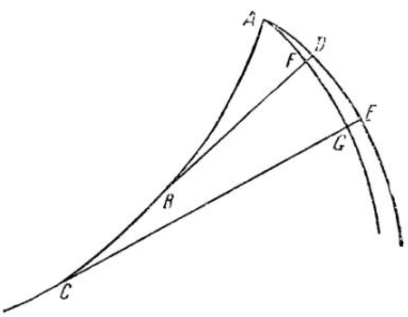
Выходит, что сумма хорд $AF + FG + GH + HK > \smile AGK$, что невозможно, так как каждая хорда меньше соответствующей ей дуги, т. е. наше предположение неверно.

Следовательно, не может существовать двух кривых, обладающих указанным выше свойством, что и требовалось доказать.

Предложение IV

Если две кривые, изогнутые в одну сторону и вогнутые в ту же сторону, исходят из той же точки и если все касательные к одной пересекают другую под прямым углом, то эта вторая является эвольвентой первой, начинающейся, с общей точки.

Пусть (фиг. 44) ABC и ADE — две кривые, изогнутые в одну сторону и вогнутые в ту же сторону, имеющие общую точку A и такие, что все линии, касательные к ABC, напр. BD, CE, пересекают ADE под прямым углом.

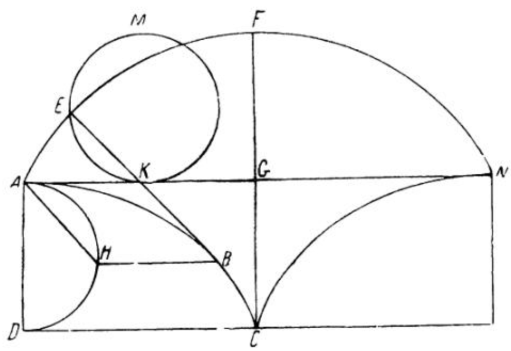


Фиг. 44.

Тогда я утверждаю, что ADE образуется путем развертки ABC, начиная с точки A. Допустим, что при развертывании появляется другая кривая, AFG. Тогда по предложению I каждая касательная к кривой ABC, напр. BD, CE, пересекает AFG под прямым углом. Точки пересечения пусть будут F и G. Но те же касательные, по нашему предположению, пересекают под прямым углом кривую ADE. Следовательно, ADE и AFG — две кривые, исходящие из одной точки, изогнутые в одну сторону и вогнутые в ту же сторону и обе одновременно пересекаемые под прямым углом линиями, касательными к ABC; обе кривые вогнуты в ту же сторону, так как они обе вогнуты в ту же сторону, что и ABC. Для ADE — это условие предложения, для AFG — это следует из предложения I. Но по предложению III не может быть двух кривых, вогнутых в ту же сторону, исходящих из одной точки и одновременно пересекаемых под прямым углом одними и теми же прямыми. Следовательно, сама линия ADE есть эвольвента ABC, что и требовалось доказать.

Предложение V

Если провести касательную к циклоиде в ее вершине и на этой касательной как на основании построить новую циклоиду, подобную и равную первой и имеющую свое начало в вершине первой, то каждая касательная к первой циклоиде пересекает вторую под прямым углом.



Фиг. 45.

Пусть (фиг. 45) прямая AG касается циклоиды ABC в вершине A; на AG как на основании построена новая циклоида AEF, подобная и равная первой. Ее вершина в точке F. Прямая BK касается циклоиды в точке B. Я утверждаю, что продолжение BK пересекает циклоиду AEF под прямым углом.

Строим над AD образующий круг AHD. Проводим через B линию BH, параллельную основанию и пересекающую круг в точке H. Соединяем H и A. Тогда BK параллельна AH (по предложению XV второй части). Следовательно, $AKBH$

есть параллелограмм, отсюда $AK = HB$ и, следовательно (по предложению XIV второй части), $AK = AH$. Затем описываем круг KEM, равный образующему кругу AHD, касающийся основания AH в точке K и пересекающий продолжение прямой BK в точке E. Так как AH параллельно BKE, то $\angle EKA = \angle KAH$. Следовательно, продолжение прямой BK вырезает из круга KM дугу той же длины, как и дуга, вырезаемая прямой AH из круга AHD.

$$\smile KE = \smile AH = HB = KA.$$

Отсюда, по свойству циклоиды, следует, что в то время как образующий круг KM касался основания в K, точка, описывающая циклоиду, была в E. Поэтому прямая KE пересекает циклоиду в E под прямым углом (по предложению XV второй части). Но KE есть продолжение BK. Следовательно, касательная BK пересекает циклоиду AEF под прямым углом, что и требовалось доказать.

Предложение VI

Если развертывать полуциклоиду, начиная с вершины, то опять получается полуциклоида, равная и подобная эволюте и имеющая основанием прямую, касательную к эволюте в ее вершине.

Пусть (фиг. 45) ABC — полуциклоида. Над ней построена другая полуциклоида, AEF, подобная и равная ABC, как в предыдущей теореме. Я утверждаю следующее. Если положить нить вокруг полуциклоиды ABC и начать сматывание ее с вершины циклоиды A, то конец нити опишет полуциклоиду AEF. Действительно, обе полуциклоиды изогнуты в одну сторону, вогнуты в ту же сторону и все касательные к ABC пересекают AEF под прямым углом. Отсюда следует, что полуциклоида AEF образована из ABC путем развертывания (предложение IV).

Начертим еще полуциклоиду CN, симметричную полуциклоиде ABC относительно CG. Если тогда сматывать нить с CN, начиная с точки N, или наматывать на CN нить, начиная с положения CF, то в обоих случаях конец нити опишет полуциклоиду FN, образующую вместе с полуциклоидой AF полную циклоиду AFN.

Отсюда и из предложения XXV о падении весомых тел следует правильность того, что при изложении устройства часов сказано о равномерном ходе маятника. Если маятник висит между двумя щеками, имеющими форму циклоид, то он, очевидно, будет описывать дугу циклоиды и, следовательно, его колебания независимо от величины амплитуды будут совершаться в одинаковые времена. Ибо все равно, будет ли тело двигаться по поверхности, имеющей кривизну циклоиды, или же будет описывать циклоиду по воздуху, так как в обоих случаях у тела во всех точках та же свобода, и та же наклонность к движению.

Предложение VII

Длина циклоиды равна учетверенной длине оси или диаметра образующего круга. Обращаемся к предыдущей фиг. 45.

Когда нить смотана с полуциклоиды ABC, она вытягивается на длину CF, равную двум диаметрам образующего круга, так как обе циклоиды имеют равные длины осей или диаметров. Длина полуциклоиды равна длине нити. Следовательно, длина такой циклоиды равна четырем диаметрам образующего круга.

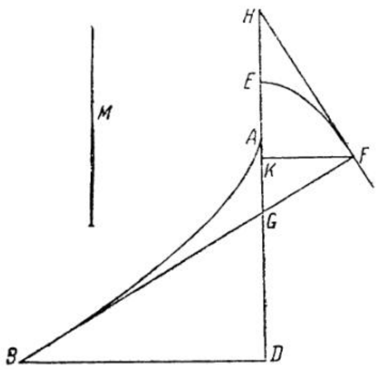
Далее, так как касательная BE представляет смотанную часть нити, которая раньше окружала дугу AB, то, очевидно, длина BE равна длине дуги AB. Но BE — вдвое длиннее, чем BK или AH, так как $KE = AH$, как показано в предложении V. Следовательно, длина дуги циклоиды AB вдвое длиннее, чем AH или BK, причем линия BH параллельна основанию циклоиды. При этом точка B может занимать любое место на циклоиде. Длину циклоиды первым нашел, однако совсем другим путем, выдающийся английский математик Христофор Рен. Он дал изящное доказательство своих выводов, помещенное в книге знаменитейшего Джона Уоллиса о циклоиде.[39] Еще много других прекрасных теорем относительно этой кривой найдено современными математиками. Главным побуждением к нахождению этих теорем были задачи, поставленные французом Блэзом Паскалем, отличившимся в этих изысканиях.[40] Паскаль, разбирая свои работы и работы других ученых, утверждает, что Мерсенн первый рассматривал эту кривую, Роберваль первый определил касательные к ней, измерял плоскости и объемы, ею ограниченные и определял центры тяжести поверхностей, ограниченных этой кривой или частями этой кривой. Рен дал выпрямление этой кривой, а я первый промерил площадь той части циклоиды, которая получается, если отсчитать $^1/_4$ часть оси от вершины и провести параллель основанию. Эта часть составляет половину площади правильного шестиугольника, вписанного в образующий круг. Сам Паскаль определил центры тяжести поверхностей и тел, получающихся при вращении циклоиды вокруг оси или основания или частей этих тел. Так же точно он нашел центр тяжести самой кривой, правда, использовав найденное Реном выражение, а также размеры кривых поверхностей, ограничивающих указанные тела и их части. Так же точно он приписывает себе определение длин дуг удлиненных или укороченных циклоид, т. е. тех кривых, которые при качении круга образуются точкой, лежащей вне или внутри образующего круга. Соответственные доказательства опубликованы Паскалем. После того Уоллис напечатал свои тончайшие рассуждения о циклоиде и утверждает, что он нашел свои теоремы вполне самостоятельно и решил задачи, предложенные Паскалем. То же самое утверждает о себе ученый Лалубер. О том, какая заслуга и кому из названных лиц принадлежит, пусть судят ученые по самим работам.[41] Я же привел все вышеизложенное потому, что не считал возможным обойти молчанием столь выдающиеся открытия. Благодаря им циклоида исследована точнее и основательнее всех других кривых.

Что касается моего метода исследования циклоиды, то я испытал его и на других кривых. К этим своим исследованиям я теперь и перехожу.

Предложение VIII

Найти эволюту параболы.

Пусть AB (фиг. 46) — полукубическая парабола[42] с осью AD и вершиной в точке A. Она обладает следующим свойством. Если из произвольно взятой точки B на полукубической пораболе опустить перпендикуляр BD на ось AD, то куб AD равен объему прямоугольного параллелепипеда, основание которого есть квадрат со стороной, равной BD, а высота равна длине определенного отрезка M (на фиг. 46). Назовем длину отрезка M буквой q



Фиг. 46.

$$\overline{AD}^3 = q\overline{BD}^2.$$

Эта кривая давно известна математикам. Продолжим ось AD на длину $AE = \frac{8}{27} q$. Натянем нить вдоль BAE и затем начнем сматывать ее, начиная с E. Я утверждаю, что конец нити опишет параболу EF с осью EAG и вершиной в E и полупараметром EA. Проводим через произвольную точку B полукубической параболы AB касательную, которая пересечет ось ординат в точке G. Из G проводим прямую GF, пересекающую параболу EF под прямым углом. Перпендикуляр к GF в точке F, т. е. линия FH, будет касательной к параболе EF. Опускаем из точки F перпендикуляр на ось EAG, он пересечет ось в точке K.

$$KG = EA.\text{[43]}$$

Если прибавить или вычесть с двух сторон равенства по AK, то получается $EK = AG$.

Но $AG = \frac{1}{3} AD$, так как BG — касательная к полукубической пораболе в точке B. Это равенство легко вывести из свойств полукубической пораболы.[44] Следовательно,

$$EK = \frac{1}{3} AD.$$

Отсюда длина KH, которая по свойствам обыкновенной параболы вдвое длиннее KE, равняется $\frac{2}{3} AD$.[45]

$$KH = \frac{2}{3} AD.$$

Следовательно,

$$KH^3 = \frac{8}{27} \cdot AD^3 = \frac{8}{27} qBD^2 = AE \cdot BD^2.$$

Отсюда выводим

$$\frac{BD^2}{KH^2} = \frac{KH}{AE} = \frac{KH}{KG},$$

но $KH = \frac{2}{3} AD$, т. е. $KH = GD$.

Подставляем в предыдущее выражение

$$\frac{BD^2}{GD^2} = \frac{HK}{KG}.$$

С другой стороны,

$$\frac{HK}{KG} = \frac{FK^2}{KG^2}.$$ [46]

Таким образом,

$$\frac{BD^2}{GD^2} = \frac{FK^2}{KG^2},$$

$$\frac{BD}{GD} = \frac{FK}{KG}.$$

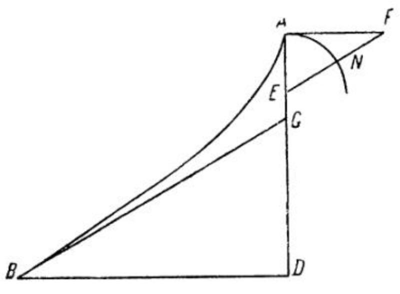
Отсюда следует, что BFG — прямая линия, GF пересекает параболу под прямым углом, следовательно, и BG, касательная полукубической параболы, пересекает параболу под прямым углом. Таким образом, по предложению IV установлено, что при развертывании кривой EAB от точки E описывается парабола, что и требовалось доказать.

Предложение IX

Начертить прямую линию, равную длине данной дуги полукубической пораболы.

Построение следует из предыдущей теоремы, причем парабола EF (фиг. 46) для построения не требуется. Пусть AB (фиг. 47) данная дуга полукубической параболы. Строим касательную в точке B, которая встретит ось в G. Эту касательную находим так: опускаем на AD перпендикуляр из B и откладываем от A отрезок $AG=\frac{1}{3}AD$. Затем откладываем от A линию $AE=\frac{8}{27}q$, где $q=M$ и есть параметр полукубической параболы. Из E проводят линию, параллельную BG, и через A линию, параллельную BD. Эти линии пересекаются в F. Длина дуги AB равна $BG+NF$, где NF — избыток EF над AE, т. е.

$$\smile AB=BG+EF-AE.$$



Фиг. 47.

Доказательство этого ясно из предыдущего.[47]

И здесь я пришел к кривой, длина которой уже была измерена до меня. Это та самая кривая, которую Иоганн ван Хеурат из Гарлема выпрямил в 1659 г. Его доказательство включено в вышедшую в том же году геометрию Декарта и стоит там после примечаний Яна ван Схоутена.[48]

Итак, Хеурат первый — выпрямивший математически определенную кривую. Только Рен приблизительно в то же время выпрямил дугу циклоиды со столь же изящным доказательством.

Я знаю, что после обнародования открытия Хеурата высокоученый Уоллис в своей книге о циссоиде приписал честь первого открытия своему соотечественнику Вильяму Нейлю. Но, по моему мнению, Нейль, правда, лишь немного отстал от Хеурата, но все же не вполне достиг его результатов. Из его доказательства, приведенного у Уоллиса, вовсе не видно, с какой давно известной кривой совпадает выпрямленная им дуга. Если бы он это знал, то уже наверное либо он, либо какой-нибудь другой математик от его имени сообщил бы математикам об этом важном открытии, несомненно заслуживающим возгласа Архимеда „эврика“[49]. Фермат, тулузский городской советник и выдающийся математик, также дал самостоятельное доказательство этого открытия, но его доказательство появилось только в 1660 г. и, следовательно, значительно позднее.[50]

Так как я как раз разбираю этот вопрос, то да будет мне позволено указать, чем я сам содействовал столь важному открытию. Я подготовил путь Хеурату и до него и, таким образом, первый свел выпрямление параболы на квадратуру гиперболы, что составляет часть открытия Хеурата.[51] Именно я в конце 1657 г. сделал одновременно два открытия: выпрямление параболы, о котором я только что говорил, и сведение поверхности параболоида к кругу.[52]

Я сообщил ван Схоутену и некоторым другим друзьям в письмах, что нашел две совсем новые теоремы о параболе, из которых одна касается сведения поверхности параболоида к кругу. Это письмо ван Схоутен сообщил Хеурату, с которым он тогда общался, и этот остроумный человек легко догадался, что выпрямление параболы сродни планификации параболоида. Исходя из этого, он, наконец, дошел и до выпрямления других выпрямляемых параболоидальных кривых.

Я хотел бы еще присоединить несколько соображений о планификации параболоида, высказанных мне в письме знаменитейшего мужа, которого надо считать одним из самых выдающихся математиков нашего времени, а именно, Франсуа де Слюза, с тем, чтобы прекратить требования новых доказательств. Слюз поздравляет меня с открытием. Далее в том же письме от 24 декабря 1657 г. Слюз пишет: „Я хочу присоединить два замечания. Во-первых, ...*Во-вторых, то, что я все эти кривые и геометрические места считаю за ничто по сравнению с твоим открытием, что поверхность параболоида имеет определенное соотношение с его основным кругом. Этот вывод, самый прекрасный после квадратуры круга, я ценю значительно выше всех построений, которые я вывел в немалом количестве из представления о геометрическом месте и которые, если ты пожелаешь, я сообщу тебе при случае*". В следующем году я, однако, нашел, что поверхности гиперболоидов и эллипсоидов также сводятся к кругам и сообщил решение этих задач, правда без вывода, нескольким математикам, с которыми тогда переписывался, между прочим, французу Паскалю и англичанину Уоллису. Этот последний вскоре после этого опубликовал собственные соображения, относящиеся к этим задачам, вместе со многими другими тонкими исследованиями, и тем побудил меня отказаться от продолжения работы над моими доказательствами. Так как я все же считаю свои построения изящными и так как они пока не опубликованы, то я хочу присоединить их сюда.

Начертить круг, площадь которого равна кривой поверхности параболоида.

Пусть (фиг. 48) ABC — осевое сечение параболоида, BD — ось, B — вершина; AC — диаметр основного круга; требуется найти круг, площадь которого равна площади кривой поверхности параболоида.

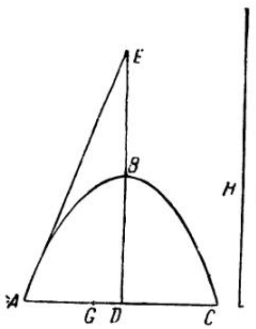
Продолжаем ось BD до E, причем $BE=BD$, соединяем точки E и A; эта линия EA есть касательная к параболе в точке A. Затем делим AD в точке G таким образом, что

$$AG:GD=EA:AD.$$

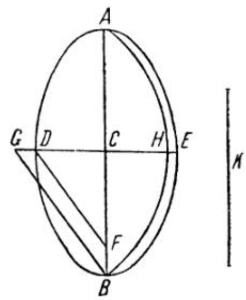
Чертим отрезок $H = AE + DG$, отрезок L, равный $\frac{1}{3}$ AC, и строим X — среднюю пропорциональную к H и L; тогда X есть радиус искомого круга.[53]

Напр., если $AE = 2AD$, то отношение кривой поверхности параболоида к основному кругу $= \frac{14}{9}$, если $AE = 3AD$; то дробь будет $= \frac{13}{6}$, если $AE = 4AD$, то $\frac{14}{5}$, и вообще будет всегда получаться целочисленное отношение, если между AE и AD существует такое отношение.[54]

Построить круг, площадь которого равна площади удлиненного эллипсоида.



Фиг. 48.



Фиг. 49.

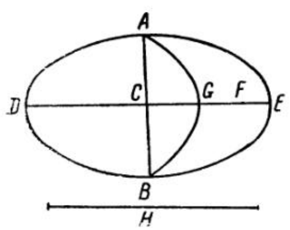
Пусть (фиг. 49) AB — ось удлиненного эллипсоида, C — его центр, $ADBE$ — осевое сечение, DE — малая ось, F — один из фокусов, тогда $DF = CB$. Соединяем D с F и проводим через B линию GB, параллельную DF. Около G как около центра описываем дугу круга радиуса GB; она пересечет CE в H. Находим K, где K — средняя пропорциональная между полуосью CD и суммой дуги AHB и диаметра DE. Прямая K — радиус искомого круга, площадь которого равна площади кривой поверхности эллипсоида.[55]

Построить круг, площадь которого равна поверхности широкого или сплюснутого эллипсоида.

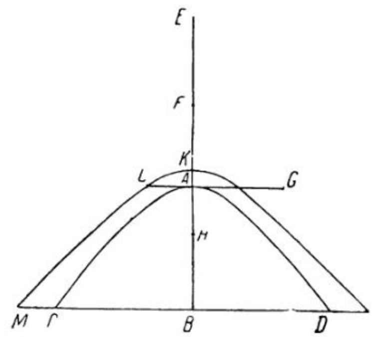
Пусть (фиг. 50) AB — ось сплюснутого эллипсоида $AEBD$ и C — центр его, $AEBD$ — осевое сечение эллипсоида, F — его фокус. Делят CF пополам в точке G и через точки A, B, G проводят параболу с вершиной в G и основанием AB. Находят H — среднюю пропорциональную между DE и длиной дуги параболы AGB. Длина H и будет радиусом круга, площадь которого равна площади поверхности рассматриваемого эллипсоида.[56]

Начертить круг, площадь которого равна кривой поверхности гиперболоида.[57]

Пусть дан гиперболоид; (фиг. 51) AB — его ось,



Фиг. 50.



Фиг. 51.

CAD — гипербола, получающаяся при осевом сечении гиперболоида; EA — главная ось гиперболы, F — центр ее, AG — касательная к гиперболе в вершине, причем AG = параметру гиперболы.

Отложим на оси длину $AH = \frac{1}{2} AG$ и затем FK так, чтобы

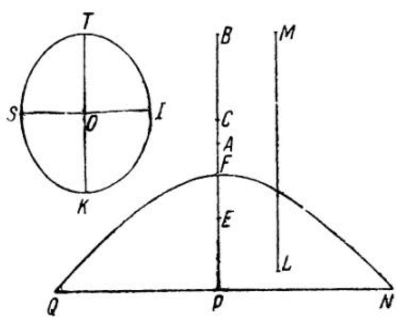
$$\frac{HF}{AF} = \frac{AF^2}{FK^2}.$$

Затем строим вторую гиперболу KLM с вершиной в K и той же осью и тем же центром в F, как гипербола CAD. Пусть отношение главных осей новой и старой гипербол обратно отношению соответственных параметров. Пусть новая гипербола пересекает продолжение BC в M и продолжение

AG в L. Тогда кривая поверхность гиперболы относится к площади круга основания с диаметром CD, как площадь $ALMB$ (ограниченная тремя прямыми и дугой гиперболы) к $\frac{1}{2}BC^2$.

Отсюда легко вывести дальнейшее построение, предположив известной квадратуру гиперболы.[58]

Итак, поверхность параболоида может быть сведена к поверхности круга так же, как это по известным теоремам геометрии делается для поверхности шара. Для получения того же результата для удлиненного эллипсоида надо предположить известным выпрямление дуги круга; для планификации сплюснутого эллипсоида, а также гиперболоида надо считать известной квадратуру гиперболы, ибо выпрямление параболы, которое мы применили у эллипсоида указанного типа, может быть сведено, как я вскоре покажу, к квадратуре гиперболы.



Фиг. 52.

Однако заслуживает упоминания мое открытие, что можно, без предположения знания квадратуры гиперболы, построить круг, площадь которого равна сумме площадей сплюснутого эллипсоида и гиперболоида.

Именно, если дан любой сплюснутый эллипсоид, то можно построить такой гиперболоид, и обратно, если дан гиперболоид, то можно построить такой сплюснутый эллипсоид, что сумма обеих поверхностей равна кругу. Достаточно будет привести один пример, самый простой из всех возможных.

Дан сплюснутый эллипсоид (фиг. 52) SI — его ось, а эллипс $STKI$ — его осевое сечение, O — центр эллипса,

TK — его большая ось. Пусть эллипс так выбран, что большая ось относится к параметру, как отрезок, разделенный в крайнем и среднем отношении к своей большей части.

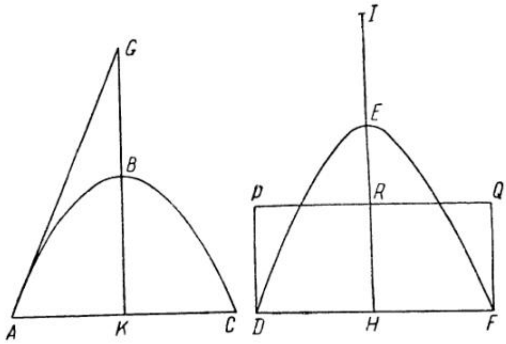
Чертим $BC = SO\sqrt{2}$ и $BA = OK\sqrt{2}$, строим точки F и E так, чтобы $\frac{BC}{BA} = \frac{BA}{BF} = \frac{BF}{BE}$ и делаем $EP = EA$.

Затем строят гиперболоид QFN с осью FP. Пусть его главная полуось равна FB, полупараметр равен BC. Кривая поверхность гиперболоида и поверхность эллипсоида вместе равны поверхности шара радиуса ML, такого, что

$$ML^2 = TK^2 + 2SI^2.$$ [59]

Найти прямую, равную данной дуге параболы.

Пусть (фиг. 53) ABC — дуга параболы, BK — ее ось, AC — ее основание, перпендикулярное к оси. Требуется выпрямить дугу ABC.



Фиг. 53.

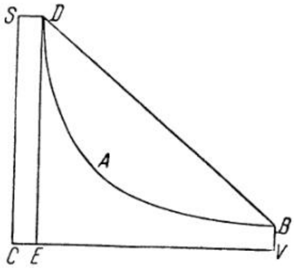
В точке A строим к параболе касательную AG; она пересекает ось в точке G.

Чертим $IH = AG$. Откладываем на IH длину $IE = AK$. Строим гиперболу DEF с вершиной в E и центром в I. Величина параметра произвольная. EH — ось гиперболы, D и F — точки, в которых перпендикуляр, восставленный в H, пересекает гиперболу.

На основании DF строим прямоугольник $DPQF$, равновеликий с площадью DEF. Пусть PQ пересекает ось EH в R, тогда отрезок RI равен длине дуги AB, т. е. составляет половину дуги ABC.[60]

Отсюда следует, что выпрямление параболы сводится к квадратуре гиперболы, и наоборот.

Все задачи, сводящиеся к одной из этих двух, можно численно решать с любой точностью при помощи удивительного открытия логарифмов. Действительно, мною было найдено, что квадратура гиперболы может быть выполнена численно с любой точностью. Метод решения следующий.



Фиг. 54.

Пусть (фиг. 54) DAB — дуга гиперболы; CS и CV — ассимптоты гиперболы, DE и BV — линии, параллельные SC. Образуют разность логарифмов чисел, относящихся друг к другу так же, как DE к BV, и определяют логарифм этой разности. Если прибавить к этому логарифму число 0.3622156887 (всегда это постоянное число), то получается логарифм числа, выражающего площадь $DEVBAD$, ограниченную тремя прямыми и кривой DAB. Единицей площади при этом является параллелограмм $SCED$. Из этого легко уже вычислить площадь сегмента $DABD$.[61]

Например, пусть $DE:BV = 36:5$, тогда надо вычислять следующим образом:

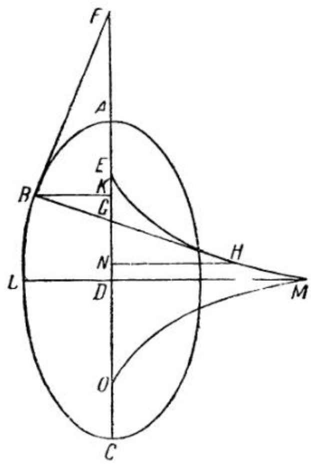
Из логарифма $36 = 1.5563025008$,
вычитается логарифм $5 = 0.6989700043$,
получаем разность логарифмов $= 0.8573324965$
и логарифм этой разности $= 9.9331492856 - 10$.
К нему прибавляется $= 0.3622156887$.
Получаем логарифм площади $DEVBAD = 0.2953649743$.
Число, соответствующее этому логарифму, есть 1.974081026.

Следовательно, площадь фигуры $DEVBAD$ в 1.974081026 раза больше площади параллелограмма $SCED$.

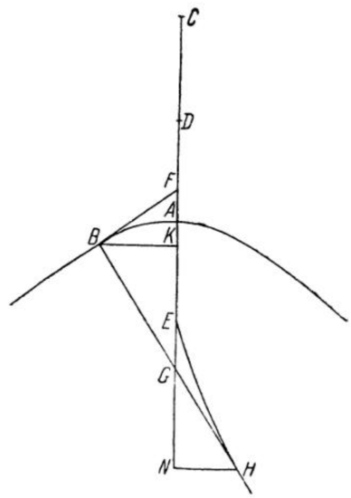
Предложение X

Найти эволюты эллипса и гиперболы и выпрямить их.

Пусть (фиг. 55 и 56) AB — какой-либо эллипс или гипербола, AC — поперечная ось фигуры, D — ее центр, AE —



Фиг. 55.



Фиг. 56.

полупараметр. Берем на кривой произвольную точку, положим B, и опускаем из нее перпендикуляр BK на ось AC.

Строим в точке B касательную к фигуре, пересекающую ось в точке F. Через B проводим нормаль, пересекающую ось в точке G, и определяем на ней точку H соотношением

$$\frac{BH}{HG} = \frac{GF \cdot AD}{FK \cdot DE}.$$

Я утверждаю, что кривая EHM, все точки которой построены так же, как точка H, вместе с прямой EA при сматывании нити дают данную кривую, и далее, что BH касается кривой в точке H и что длина BH равняется длине HEA. Так как все точки кривой EHM построены совершенно определенным образом, то кривая EHM относится к классу чисто геометрических кривых, для которых можно составить уравнение. Я нашел, что это уравнение шестой степени.[62]

Особенно упрощается уравнение, когда AB — равнобокая гипербола. Если мы в этом случае опустим из произвольной точки кривой H перпендикуляр на ось CA и обозначим AC через $2a$, DN через x и NH через y, то мы имеем[63]

$$[x^2 - y^2 - (2a)^2]^3 = 27x^2y^2(2a)^2.$$

В этом случае можно строить точки кривой EHM гораздо проще. Это более легкое построение будет указано в дальнейшем. Следует обратить внимание на то, что у эллипса к каждому квадранту относится отдельная эволюта, так, например, к квадранту ABL — эволюта $AEHM$, к квадранту CL — симметричная к первой эволюта COM. У обоих конических сечений существует следующее различие. У обеих кривых (для эллипса и для гиперболы) E — начало кривой EHM, причем AE должно равняться полупараметру. Но у гиперболы кривая уходит в бесконечность, а у эллипса она имеет конечную точку M, лежащую на малой оси так, что

$$LM = \frac{a^2}{b}.$$ [64]

Легко усмотреть, что точка M является конечной точкой кривой, если вспомнить построение кривой и вывести из него для эллипса соотношение

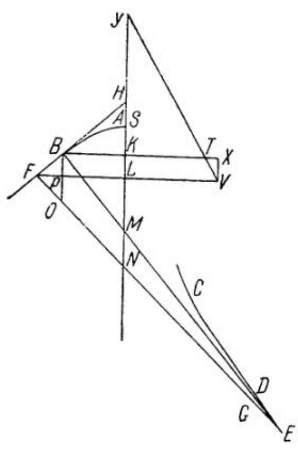
$$LM : DM = AD : DE.$$ [65]

Но я не буду останавливаться на доказательстве этих утверждений, а сразу перейду к изложению метода, по которому можно находить эволюты конических сечений и бесчисленного множества других как-либо заданных кривых.

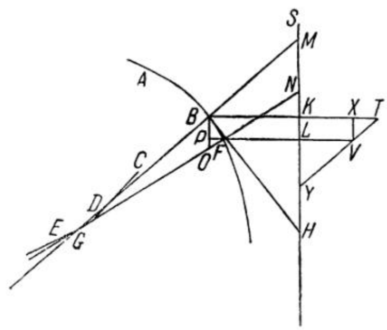
Предложение XI

Построить эволюту данной кривой и показать, что каждая геометрически определенная кривая имеет также геометрически определенную эволюту, которую можно выпрямить.

Пусть ABF — какая-либо кривая или отрезок кривой, изогнутый в одну сторону (фиг. 57 и 58), KL — ось абсцисс, к которой отнесены все точки кривой. Найти другую кривую DE, разверткой которой является данная кривая ABF.



Фиг. 57.



Фиг. 58.

Допустим, кривая уже найдена. Так как все касательные к кривой DE пересекают эвольвенту ABF под прямым углом, то и обратно, все кривые, которые пересекают ABF под прямым углом, например, BD и FE, должны касаться эволюты CDE.

Пусть B и F — очень близкие друг другу точки. Сматывание происходит по предположению, начиная с точки A, и точка F расположена будет дальше от A, чем B; тогда и точка касания E дальше от A, чем D; а пересечение двух прямых, BD и FE, происходящее в точке G, будет лежать на продолжении BD.

Обе прямые должны пересечься, так как они пересекают кривую BF под прямым углом с вогнутой стороны.

Чем ближе будет точка F к точке B, тем ближе будут точки D, G, E. Если расстояние BF станет бесконечно малым, то можно считать указанные точки слившимися в одну. Касательную к кривой ABF в точке B можно будет считать и касательной в точке F. Проводим через B линию, параллельную KL, которая пересечет FE в точке O, опускают из B и F на ось KL перпендикуляры BK и FL. Пусть FL пересекает BO в P. Прямые BD и FE пересекаются с прямой KL в точках M и N. Тогда

$$BG:GM = BO:MN.$$

Если дано второе отношение, то этим самым определяется и первое, и так как BM известно по величине и расположению, то этим отношением определяется и положение точки G на продолжении BM, или также точка D кривой CDE, так как по вышеизложенному, точки G и D в пределе совпадают.[66]

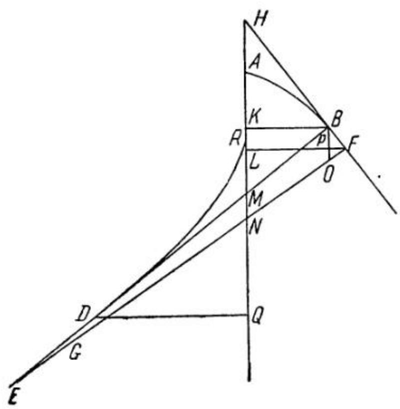
Отношение $BO:MN$ очень легко определить для циклоиды. Я определил его прежде всего для этой кривой и нашел равным $2:1$.[67]

У других кривых, которые я исследовал до настоящего времени, это отношение получалось из двух других соотношений. Именно, так как

$$\frac{BO}{MN} = \frac{BO}{BP} \cdot \frac{BP}{MN} = \frac{NH}{LH} \cdot \frac{KL}{MN},$$ [68]

то левое отношение может быть определено, если определены два правые отношения. А мы вскоре покажем, что правые отношения могут быть определены для всех геометрических кривых: следовательно, для всех этих кривых можно определить кривые, разверткой которых геометрические кривые являются и которые по этой причине могут быть выпрямлены.

Пусть (фиг. 59) ABF — парабола с вершиной A и осью AQ. Проводим нормали к параболе BM и FN и опускаем из B и F на ось AQ перпендикуляры BK и FL. Тогда по свойству параболы $MK = NL = p$, где p — полупараметр параболы.



Фиг. 59.

Вычитая из каждой стороны равенства по LM, получаем

$$KL = MN.$$

Так как

$$\frac{BG}{GM} = \frac{NH}{HL} \cdot \frac{KL}{MN},$$

то мы получаем

$$\frac{BG}{GM} = \frac{NH}{HL}.$$

Следовательно,

$$\frac{BM}{MG} = \frac{NL}{LH} = \frac{MK}{KH},$$

где $NL = MK$, а вместо LH можно поставить KH ввиду близости точек L и K из-за близости B и F.

Если точка B дана, то отношение $MK : KH$ известно, так как $MK = p$, а $KH = 2KA$. Так как, кроме того, BM дано по длине и положению, то и MG определено; следовательно, определена и точка G или D на кривой RDE. Точка G находится продолжением BM до точки G, для которой

$$BM : MG = p : 2KA.$$

Если взять на параболе кроме B еще произвольное число других точек, то можно этим построением найти такое же число точек кривой RDE. Из построения следует, что кривая RDE математически определенная и что из ее образования можно заключить о всех свойствах кривой. Прежде всего я хочу вывести уравнение кривой RDE. Опустим из D на ось AQ перпендикуляр DQ. Пусть p — полупараметр параболы ABF, $AK = x$, $AQ = \xi$, $DQ = \eta$. Тогда имеем [69]

$$BM : MD = KM : MQ = p : 2x.$$

Так как $KM = p$, то отсюда следует $MQ = 2x$. Далее, $MA = x + p$, следовательно,

$$AQ = \xi = 3x + p,$$
$$x = \frac{1}{3}\xi - \frac{1}{3}p.$$

Так как

$$MK^2 : KB^2 = MQ^2 : QD^2,$$

то получается

$$p^2 : 2px = 4x^2 : \eta^2.$$

Заменив в этом уравнении x через $\frac{1}{3}\xi - \frac{1}{3}p$, имеем

$$\eta^2 = \frac{8\left(\frac{1}{3}\xi - \frac{1}{3}p\right)^2}{p},$$
$$\frac{27}{8}p\eta^2 = (\xi - p).^2$$

Если на оси параболы определить точку R так, что $AR = p$, то

$$RQ = \xi - p.$$

Итак, кривая, как мы и выше определили, есть полукубическая парабола,[70] параметр которой q в $\frac{27}{16}$ раза превышает параметр $2p$ первоначальной параболы AB.

Ясно, что отношение $OB : BP$ или $NH : HL$ всегда можно найти, даже и в том случае, когда ABF не парабола, но какая-либо другая математически определенная кривая. Надо только (фиг. 57 и 58) построить касательную FH к кривой в точке F и построить перпендикуляр FN к этой касательной, тогда известны NH и HL, а следовательно, и их отношение. Несколько труднее усмотреть, каким образом находится отношение $KL:MN$. Я хочу теперь показать, что и это отношение всегда может быть вычислено.

Продолжим (фиг. 57 и 58) BK за K на длину KM до точки T и EL — за точку L на длину LN до точки V. Проводим через V линию, параллельную KL, которая пересечет KT в X. Мы всегда имеем

$$NM-KL=LN-KM=LV-KT=XT.$$ [71]

С другой стороны, $KL=XV$, отсюда

$$NM=VX+XT$$

или

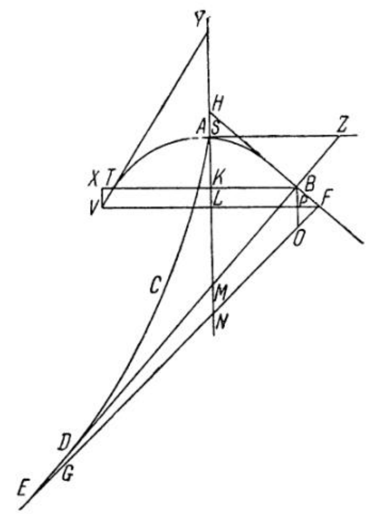
$$NM=VX-XT.$$

Если отношение $VX:XT$ дано, то и отношение $VX:(VX+XT)$ или $VX:(VX-XT)$ известно, т. е. отношение $\frac{VX}{NM}$ или $\frac{LK}{NM}$.[72] Так как по построению $KT=KM$ и $LV=LN$, то, как мы вскоре покажем, должно существовать определенное геометрическое место для точек T и V, которое является прямой или кривой линией.[73]

Прямая линия получится, когда ABF есть коническое сечение с осью KL. Так как тогда дана прямая VT, геометрическое место точек V, T, то и отношение $VX:XT$ известно; и это отношение будет всегда иметь то же значение, независимо от величины отрезка KL.

Если геометрическое место — кривая линия, то отношение $VX:VT$ будет принимать различные значения в зависимости от длины KL. Но надо вычислять величину этого отношения для случая бесконечно малого KL, так как точки B и F должны быть бесконечно близки друг к другу. Тогда и точки V и T ограничивают бесконечно малый участок кривой, а прямая VT совпадает с касательной к кривой. Пусть это касательная TY (фиг. 60); ее можно построить, так как кривая, к которой принадлежат точки V и T, математически определенная. Тем самым отношение $YK:KT$ известно, а следовательно, и $VX:XT$, а это последнее, как выше показано, равно отношению $LK:NM$.[74]

Для установления вида кривой, к которой принадлежат точки T и V, берут какую-либо точку S на прямой KL и полагают $SK=x$, $KT=y$. Так как кривая ABF дана и BM приведено по нормали, то можно определить расстояние KM по методу Декарта для вычисления касательных;[75] далее, мы имеем $KM=KT=y$, и это уравнение определит вид кривой TV, к которой надо провести касательную. Все это станет яснее из следующего примера.



Фиг. 60.

Пусть ABF (фиг. 60) есть полукубическая парабола, та, которую мы выше выпрямляли, S — ее вершина, SKL — ее ось. Требуется найти ее эволюту.

Прежде всего будет легко определить отношение $\frac{BO}{BP}$, так как мы знаем, что касательную к полукубической параболе в точке B строят, взяв $SH=\frac{1}{2}SK$.[76]

К этой касательной в точке B проводят перпендикуляр BM. Тогда определяются расстояния MH и HK и, следовательно, отношение $\frac{MH}{HK}$, равное отношению $\frac{OB}{BP}$.

Чтобы найти отношение BP или KL к MN, продолжают BK до T и FL до V, причем $KT=KM$ и $LV=LN$, и проводят VX параллельно LK.

Имеем

$$KL+LN-KM=MN,$$ [77]

или

$$XV+VL-KT=MN,$$
$$XV+XK-KT=MN,$$
$$XV+XT=MN.$$

Отсюда

$$\frac{KL}{MN}=\frac{VX}{VX+XT}.$$

Для того чтобы вычислить это отношение для чрезвычайно малого KL, нужно найти геометрическое место точек T, V.

Пусть a — параметр параболы ABF, $SK=x$, $KF=y$. Имеем

$$KH:KB=KB:KM.$$

KH равно $\frac{3}{2}x$, KB по свойству полукубической параболы равно $\sqrt[3]{ax^2}$.

Отсюда

$$KM=KT=y=\frac{2}{3}\sqrt[3]{a^2x}$$

и далее

$$\frac{8}{27}a^2x=y^3.$$

Итак, геометрическое место точек T, V есть кривая, которую математики называют кубической параболой. Касательную в T можно построить, взяв $SY=2SK$ и соединив Y с T.[78]

Тогда из вышедоказанной пропорции

$$\frac{KL}{MN}=\frac{VX}{VX+XT}$$

получается

$$\frac{KL}{MN}=\frac{YK}{YK+KT}.$$

Но это последнее соотношение известно, а следовательно, известно и $\frac{KL}{MN}$. Но мы уже показали, что отношение $\frac{OB}{PB}$ также известно и, так как $\frac{BD}{DM}=\frac{KL}{MN}\cdot\frac{OB}{PB}$, то и отношение $\frac{BD}{DM}$ известно.

Точка D кривой DM находится внешним делением отрезка BM в отношении $\frac{BD}{DM}$.

Но простейшее построение можно осуществить следующим путем.

Мы имеем $KT=KM=y$. Следовательно,

$$MH=y+\frac{3}{2}x,$$

$$\frac{MH}{HK}=\frac{OB}{PB}=\frac{y+\frac{3}{2}x}{\frac{3}{2}x}=\frac{2y+3x}{3x}.$$

Далее

$$YK=3x$$

и выше показано, что

$$KL:MN=YK:(YK+KT).$$

Следовательно,

$$KL:MN=3x:(3x+y).$$

Таким образом, из равенства

$$\frac{BD}{DM}=\frac{OB}{BP}\cdot\frac{KL}{MN}$$

следует

$$\frac{BD}{DM}=\frac{2y+3x}{3x}\cdot\frac{3x}{3x+y}=\frac{2y+3x}{3x+y}$$

$$\frac{BM}{DM}=\frac{y}{3x+y}.$$

Строим в S перпендикуляр к SK; он пересечет продолжение MB в точке Z.

Мы доказали соотношение

$$\frac{BM}{MD}=\frac{y}{y+3x}=\frac{MK}{MK+3KS}.$$

Но

$$\frac{MK}{MK+3KS}=\frac{MB}{MB+3BZ},$$

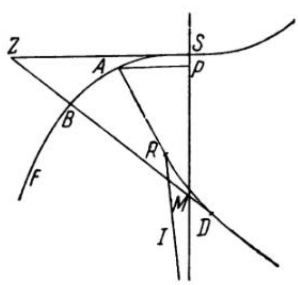
следовательно, и

$$\frac{BM}{MD}=\frac{MB}{MB+3BZ}.$$

Отсюда находим

$$MD=MB+3BZ.$$

Таким образом, можно построить сколько угодно точек кривой CDE и любой отрезок кривой, например DS, будет равен прямой DB, пересекающей параболу SAB под прямым углом. Найденная кривая определена геометрически и, если угодно, можно вывести уравнение этой кривой, отнесенное к оси SK.[79]



Фиг. 61.

Так же нетрудно построить по точкам уравнение эволюты кубической параболы, т. е. параболы, кубы ординат которой пропорциональны абсциссам. Пусть (фиг. 61) SAB — кубическая парабола, SM — ее ось. (Правда, SM носит название оси кубической параболы кривой не по праву, скорее прямая SZ, перпендикулярная к SM, имеет свойство, что по обе ее стороны лежат симметрично расположенные отрезки кривой.[80] Через произвольную точку кривой B проводим линию BD, пересекающую кривую под прямым углом. Пусть BD пересекает ось в точке M и прямую SZ в точке Z. Определим на прямой BD точку D так, чтобы $BD=\frac{1}{2}BM+\frac{3}{2}BZ$, тогда D — есть точка на искомой кривой RD или RI, которая вместе с прямой RA составляет эволюту параболы SAB. При этом замечательно еще одно обстоятельство, которое имеет место и у некоторых других парабол этого рода. Здесь существуют две размотки в противоположные стороны. Обе начинаются у той же точки A. Путем сматывания нити с кривой ARD, которая тянется за точку D в бесконечность, описывается безграничная ветвь параболы ABF; путем сматывания нити с кривой ARI, которая также простирается в бесконечность, описывается конечная дуга AS. Для нахождения точки A определяют на оси точку P таким образом, что

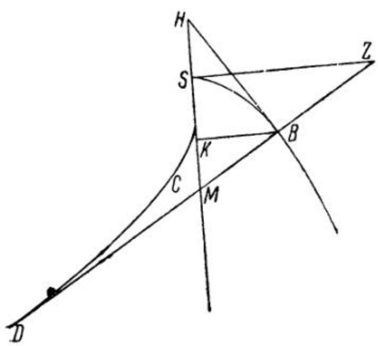
$$SP = \frac{a}{\sqrt[4]{91125}} = \frac{a}{\sqrt[4]{45^3}}.$$

В P строят перпендикуляр к оси SM. Этот перпендикуляр пересечет кубическую параболу в точке A. Точку R, в которой встречаются обе ветви RD и RI, строят тем же способом, как и остальные точки, например точку D.[81]

Коротко говоря, так же легко, как в перечисленных случаях, можно построить по точкам эволюту, и, следовательно, выпрямляемую линию, во всех случаях, когда кривая SAB есть какая-либо из парабол. Следующая таблица, которую легко продолжить, дает построение для отдельных случаев:

$$\text{если}\ \left\{\begin{array}{l} ax = y^2 \\ a^2x = y^3 \\ ax^2 = y^3 \\ ax^3 = y^4 \\ a^3x = y^4 \end{array}\right.,\ \text{то}\ \left\{\begin{array}{c} BM + 2BZ \\ \frac{1}{2}BM + \frac{3}{2}BZ \\ 2BM + 3BZ \\ 3BM + 4BZ \\ \frac{1}{3}BM + \frac{4}{3}BZ \end{array}\right\} = BD.$$

Пусть (фиг. 62) SB — парабола какого-либо рода, S — ее вершина, SK — положительная ось абсцисс, расположенная с вогнутой стороны кривой. SZ перпендикулярно к SK. Полагаем $SK = x$, $BK = y$, причем B точка кривой, BK — перпендикуляр, опущенный из точки B на ось SK, a — параметр параболы. Тогда левая сторона таблицы дает уравнение прямой, а правая часть той же строки длину отрезка BD, которую надо отложить по нормали кривой в точке B, чтобы найти одну из точек кривой CD, например, если SB простая парабола, получаемая как коническое сечение, то мы знаем, что к ней относится первая строчка таблицы. Ей соответствует $BD = BM + 2BZ$. Так находят длину линии BD и так можно построить произвольное число точек кривой CD. Как показано выше, в данном случае получается кривая, показанная слева в третьей строчке таблицы.



Фиг. 62.

Таблица составлена следующим образом. Коэффициент при BM равен показателю степени x в уравнении параболы, коэффициент при BZ равен показателю степени y в уравнении параболы. Оба выражения складываются и делятся на показателя степени a. Это дает BD.[82]

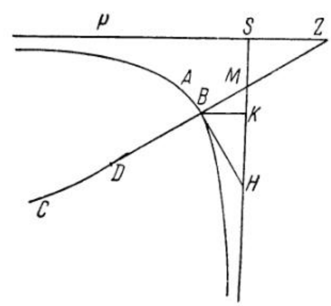
Кроме всех этих парабол существуют еще другие кривые, из которых похожим способом можно вывести новые выпрямляемые кривые. Поскольку эти кривые имеют ассимптоты, они подобны гиперболам. Правда, их ассимптоты всегда составляют между собой прямой угол. Прежде всего я исследовал обыкновенную гиперболу, получаемую сечением конуса. Для выяснения природы остальных кривых этой группы сделаем следующее построение (фиг. 63). Пусть PS и SK — ассимптоты кривой AB, которые взаимно перпендикулярны. Через произвольную точку B кривой проводим BK параллельно PS и пусть будет $x = SK$; $y = KB$.

Если AB — обыкновенная гипербола, то мы знаем, что прямоугольник со сторонами SK и KB всегда равен одному и тому же квадрату $xy = a^2$.

У следующей гиперболы имеем $x^2y=a^3$ и т. д. Таким образом, существует бесчисленное множество гипербол такого типа. Следующая таблица дает их уравнения, и одновременно метод построения эволюты DC каждой из них,

$$\text{если}\ \left\{\begin{array}{l} xy=a^2 \\[2ex] x^2y=a^3 \\[2ex] xy^2=a^3 \\[2ex] x^3y=a^4 \\[2ex] xy^3=a^4 \end{array}\right.,\ \text{то} \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}BM+\frac{1}{2}BZ \\[2ex] \frac{2}{3}BM+\frac{1}{3}BZ \\[2ex] 1\ BM+\frac{2}{3}BZ \\[2ex] \frac{3}{4}BM+\frac{1}{4}BZ \\[2ex] \frac{1}{4}BM+\frac{3}{4}BZ \end{array}\right\}=BD.$$

Пусть, как и раньше, прямая $DBMZ$ пересекает нашу кривую под прямым углом и встречает ассимптоты SK и SP в M и Z. Если гипербола задана, например, уравнением $xy=a^2$, то делают $BD=\frac{1}{2}BM+\frac{1}{2}BZ$, как указывает таблица. Таким образом находят точку D на кривой CD, и можно найти сколько угодно других точек кривой CD; любой отрезок кривой может быть выпрямлен. Полученная кривая будет та самая, уравнение которой, отнесенное к оси гиперболы, дано выше.[83]



Фиг. 63.

Составление таблицы вполне тождественно с составлением предыдущей таблицы.[84]

Так как у этих кривых, так же как у парабол, надо строить прямую DBZ, перпендикулярную в данной точке B к кривой и к ее касательной, то я хочу в общих чертах указать, как строят эти касательные. Находят на оси абсцисс точку

H, такую, что $SK:KH=m:n$, где m — показатель степени у x, n — показатель степени у y. Тогда прямая HB будет касаться кривой в B. Например для гиперболы, указанной в третьей строчке таблицы,

$$SK:KH=1:2.$$

Доказательство этого отношения известно всем, владеющим аналитической геометрией.[85]

Лица, владеющие аналитической геометрией, уже давно рассматривают эти кривые. Они разбирают не только различные параболы, выше исследованные, но также и площади между гиперболами и ассимптотами, простирающиеся в бесконечность. Я бы мог развить этот вопрос, применив легкий общий метод, использующий только свойства касательной. Но это здесь неуместно.

ЧЕТВЕРТАЯ ЧАСТЬ „МАЯТНИКОВЫХ ЧАСОВ“

О центре качания [86]

Когда я был еще почти мальчиком, ученейший муж Мерсенн задал мне и многим другим задачу — определить центр качания.[87] Из писем, которые Мерсенн мне писал, а также из недавно опубликованных мемуаров Декарта, заключающих ответ на письма Мерсенна по этому поводу, я заключаю, что эта задача пользовалась в то время известной славой среди математиков. Мерсенн поставил мне задачу нахождения центров качания круговых секторов, подвешенных или в центре, или в середине дуги и могущих совершать боковые качания, а также круговых сегментов и равнобедренных треугольников, подвешенных или в вершине, или в середине основания. Задача сводилась к построению простого маятника, т. е. нити с подвешенным грузом, такой длины, чтобы он совершал свои колебания как раз в то время, как указанные фигуры, подвешенные соответственным образом. При этом Мерсенн назначил большую, вызывающую зависть премию на тот случай, если я решу задачу. Однако он тогда ни от кого не получил того, что требовал. Что касается меня, то я в то время ничего не нашел, что позволило бы мне приступить к расчетам, и как бы повернул назад у самого порога и воздержался от всякого исследования. Но и те, кто надеялись, что решили задачу, знаменитые люди, как Декарт, Оноре Фабри и другие, вовсе не достигли цели или достигли ее только в немногих, особенно простых случаях; и для этих случаев они, на мой взгляд, не дали удовлетворительных доказательств. Это, я думаю, ясно поймет всякий, кто сравнит их изложение с моими выводами. Я думаю, что мои выводы стоят на более твердом основании и подтверждаются опытами. Повод к новой постановке опытов дали регулируемые маятники наших часов, снабженные, кроме нижнего постоянного груза, еще вторым передвижным грузиком, как сказано при описании часов.

Исходя из этого, я начал исследования снова сначала, но этот раз с лучшими видами на успех, и, наконец, одолел все трудности и решил не только задачи Мерсенна, но нашел и новые задачи, более трудные, и, наконец, нашел общий метод для уверенного вычисления центров качания линий, площадей и тел. От этого я имел не только удовольствие, что я нашел нечто, что напрасно искали столь многие, и понял законы природы, относящиеся к этому случаю, но получил и определенную пользу, которая вообще заставила меня заняться этим вопросом, а именно, я нашел легкий и удобный способ регулировки часов. К этому, однако, присоединилось еще нечто, что я считаю еще более ценным, а именно: благодаря своему открытию я смог дать абсолютно устойчивое определение для постоянной, верной для всех времен меры длины. Это определение дано в конце этой части.

Определения

I

Под маятником мы будем понимать любую, обладающую весом фигуру (линию, плоскость или тело), так подвешенную, что она может совершать колебательные движения вокруг некоторой точки или, вернее, вокруг горизонтальной оси.

II

Горизонтальную ось, вокруг которой надо мыслить колебания маятника, мы будем называть осью колебаний.

III

Под простым маятником мы будем понимать нить или линию, не гнущуюся и невесомую и несущую на нижнем конце прикрепленный груз. Вес этого груза как бы сосредоточен в одной точке.

IV

Под сложным маятником мы будем понимать тело, состоящее из нескольких грузов, сохраняющих неизменное расстояние как друг от друга, так и от оси колебаний. Таким образом, всякое подвешенное тяжелое тело может быть названо сложным маятником, так как оно может быть мысленно разделено на любое число частей.

V

Изохронными назовем маятники, совершающие колебания через подобные дуги в одинаковые времена.[88]

VI

Под плоскостью колебаний будем понимать плоскость, проходящую через центр тяжести подвешенной фигуры перпендикулярно к оси колебаний.

VII

Линией центра фигуры[89] *будем называть прямую, проведенную через центр тяжести фигуры и через ось колебаний, перпендикулярно к этой оси.*

VIII

Отвесной линией будем называть линию, проведенную от оси колебаний в плоскости качаний перпендикулярно к плоскости горизонта.

IX

Центром качаний любой фигуры назовем ту точку оси фигуры, расстояние от которой до оси колебаний равно длине простого маятника, изохронного с подвешенной фигурой.

X

Любую линию, проходящую через центр тяжести фигуры, назовем осью тяжести.

XI

Назовем колебания плоской фигуры или плоской кривой плоскими, если ось колебаний лежит в плоскости фигуры или линии.[90]

XII

Назовем колебания плоской фигуры или плоской линии боковыми, если ось колебаний расположена перпендикулярно к плоскости фигуры или кривой.[91]

XIII

Если говорят, что надо веса помножить на прямые линии, то это означает, что перемножаются числа или отрезки прямых, которые выражают величину весов или их отношение друг к другу.

Гипотезы

I

Если любое число весомых тел приходит в движение благодаря их тяжести, то общий центр тяжести этих тел не может подняться выше, чем он был в начале движения.[92]

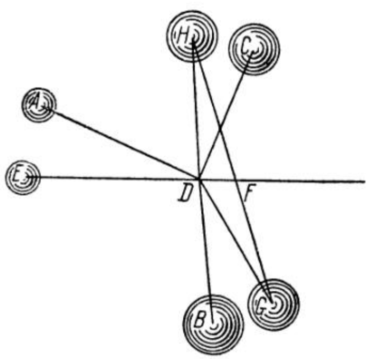
Под высотой следует понимать расстояние от горизонтальной плоскости и принимается, что весомые тела стремятся упасть на эту плоскость по линиям, которые к ней перпендикулярны. Это предположение делается всеми, которые пишут о центре тяжести или в явной форме, или должно быть дополнено при чтении, так как без этого нельзя рассуждать о центре тяжести.

Чтобы моя гипотеза не вызывала сомнения, я покажу, что она не означает ничего другого, чем то, что никем не оспаривалось, а именно, что весомые тела не движутся наверх. Прежде всего представим себе одно весомое тело, тогда без сомнения это тело не может благодаря тяготению двигаться вверх. При этом мы говорим, что тело движется наверх, когда поднимается его центр тяжести. Однако то же самое должно произойти, если мы будем иметь произвольное число весомых тел, соединенных негнущимися связями, так как ничто не мешает рассматривать их как одно тело. Следовательно, не будет подыматься и их общий центр тяжести.

Если теперь представить себе произвольное число тяжелых тел, не связанных между собой, то мы знаем, что и они имеют общий центр тяжести. На той же высоте, на какой находится этот общий центр тяжести, следует, говорю я, представить себе общий вес тел, так как все отдельные тела могут быть приведены к такой же высоте их центра тяжести, без того, чтобы для этого требовалась какая-либо другая сила, чем та, которая есть в самих телах. Надо их только соединить негнущимися линиями и двигать вокруг их центра тяжести, для этого не нужно внешней силы. Точно так же как весомые тела, находящиеся в одной горизонтальной плоскости, не могут под влиянием тяжести все подняться выше этой плоскости, так же мало возможно, чтобы центр тяжести каких-либо тел, как бы они ни были расположены, поднялся до большей высоты, чем та, на которой он сейчас находится. Что действительно можно весомые тела, без применения какой-либо силы привести к горизонтальной плоскости, в которой находится их общий центр тяжести, доказывается следующим образом.

Пусть (фиг. 64) A, B, C — весомые тела и их положения D — их центр тяжести. Прокладываем через D горизонтальную плоскость, представленную на фигуре линией EF.

DA, DB, DC, — негнущиеся стержни, жестко соединенные с телами. Теперь поворачиваем всю систему вокруг D, пока тело A не придет в горизонтальную плоскость, в положение E. Все негибкие стержни повернутся на тот же угол — B придет в G, C — в H.



Фиг. 64.

Теперь представим себе B и C соединенными жестким стержнем GH, который пересекает плоскость EF в поле F. Центр тяжёсти их непременно окажется в F, так как центр тяжести всех трех находящихся в E, G, H тел и также центр тяжести тела E находится в плоскости EDF. В той же плоскости, а следовательно, в точке F должен находиться и центр тяжести тел B и C.

Теперь приведем в движение тела B и C вокруг их центра тяжести F как вокруг оси и приведем их одновременно в плоскость EF без всякой внешней силы. Таким образом, все три груза, бывшие сначала в A, B и C, окажутся перенесенными на высоту их центра тяжести D благодаря их собственному взаимному равновесию, что и требовалось доказать. При многих телах рассуждение то же.

Эта моя гипотеза применима также и к жидкостям. И при помощи ее можно доказать не только все теоремы Архимеда о плавании тел, но и много других теорем механики. И если бы изобретатели новых машин, напрасно пытающиеся построить вечный двигатель, пользовались этой моей гипотезой, то они легко бы сами сознали свою ошибку и поняли, что такой двигатель нельзя построить механическими средствами.

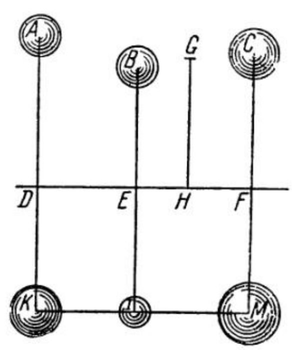
II

Допустим, что нет сопротивления воздуха и других помех движению — допущение, которое мы будем делать и в дальнейших доказательствах, — в таком случае центр тяжести колеблющегося маятника при спуске и подъеме пробегает одинаковые дуги.

Для простого маятника мы доказали это в предложении IX второй части. Опыт учит, что то же надо принять и для сложного маятника. Какую бы форму ни имел маятник, он всегда одинаково способен к продолжению своего движения, если на него не влияет большее или меньшее сопротивление воздуха.

Предложение I

Пусть произвольное число весомых тел находится по одну сторону от определенной плоскости. Опустим из центра тяжести каждого тела перпендикуляр на эту плоскость и помножим длину этого перпендикуляра на вес соответствующего тела. Если теперь опустить перпендикуляр из центра тяжести всех тел на ту же плоскость и помножить длину этого перпендикуляра на общий вес всех тел, то это произведение будет равно сумме прежде полученных отдельных произведений.



Фиг. 65.

Пусть (фиг. 65) A,B,C — весомые тела, лежащие по одну сторону от плоскости, следом которой является прямая DF. На нее опущены перпендикуляры AD, BE, CF. Пусть G — центр тяжести всех трех тел A, B, C. Опускаем из точки G перпендикуляр GH на ту же плоскость. Тогда сумма произведений каждого перпендикуляра на соответственный вес равна произведению прямой GH на сумму весов всех тел. Удлиняем каждый перпендикуляр по ту сторону плоскости DF на GH так, что $DK = EL = FM = GH$. Пусть все эти линии — негнущиеся стержни, параллельные горизонту. Поместим в K, L и M тела, вес которых выбран так, чтобы каждое из них уравновешивало бы противоположное тело A, B, C относительно пересечения с плоскостью DEF. Совокупность тел K, L, M будет в равновесии с телами A, B, C; тогда будут справедливы пропорции $K : A = AD : DK$, или $A \cdot AD = K \cdot DK = K \cdot GH$.

Равным образом

$$B \cdot EB = L \cdot EL = L \cdot GH,$$
$$C \cdot FC = M \cdot FM = M \cdot GH.$$

Сложение пропорций дает $A \cdot DA + B \cdot EB + C \cdot FC = (K + L + M)\ GH$. Здесь буквы A, B, C, K, L, M означают веса соответственных тел.

Но так как тела K, L, M уравновешивают тела A, B, C в отдельности, то равновесие сохранится и тогда, когда все тела, A, B, C, будут подвешены в их центре тяжести.

Так как сверх того

$$DK = EL = FM = GH,$$

то отсюда следует

$$A + B + C = K + L + M$$

и окончательно

$$(A + B + C)\ GH = A \cdot DA + B \cdot EB + C \cdot FC,$$

что и требовалось доказать.

При доказательстве, правда, предполагалось, что прямые AD, GH и CF горизонтальны и плоскость вертикальна; однако, если перенести все сразу в любое другое положение, то, очевидно, равенство произведений останется в силе, так как все прямые остаются те же, что и раньше, и теорема доказана.

Предложение II

Пусть (фиг. 65) *при тех же предположениях, как в предыдущей теореме, все веса* A, B, C *равны между собой, тогда я утверждаю, что сумма всех отдельных перпендикуляров* AD, BE *и* CF *равна произведению числа весомых тел на длину перпендикуляра* GH.[93]

Существовало равенство

$$(A+B+C)\ GH = A \cdot DA + B \cdot EB + C \cdot FC,$$

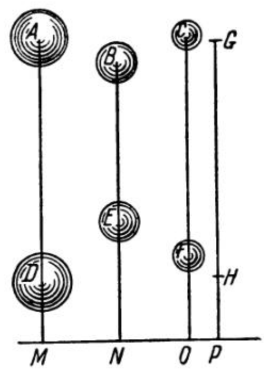
так как все веса равны между собой, то равенство принимает вид

$$n \cdot A \cdot GH = A\ (DA + EB + FC)$$

или

$$DA + EB + FC = n \cdot GH;$$

здесь n — число тел.



Фиг. 66.

Предложение III

Имеется определенное число тел; пусть они все поднимаются или все опускаются, причем высоты подъема или падения могут быть разными у разных тел. Множим вес каждого тела на высоту его падения или подъема. Тогда сумма всех этих произведений будет равна произведению общего веса всех тел на высоту подъема или падения центра тяжести.

Пусть (фиг. 66) величины A, B, C из положения A, B, C перешли в положение D, E, F, падая, или из положения D, E, F перешли в положение A, B, C, подымаясь. Пусть их центр тяжести в положении A, B, C находится на высоте G, а когда тела находятся в D, E, F, их центр тяжести находится на высоте H. Я утверждаю, что справедливо равенство

$$A \cdot AD + B \cdot BE + C \cdot CF = (A + B + C)\ GH.$$

Пусть MP — след горизонтальной плоскости и пусть продолжения AD, BE, CF и GH пересекают MP в точках M, N, O, P. Тогда по теореме I

$$A \cdot AM + B \cdot BN + C \cdot CO = (A + B + C)\ GP$$

также

$$A \cdot DM + B \cdot EN + C \cdot FO = (A + B + C)\ HP.$$

Вычитание дает

$$A \cdot AD + B \cdot BE + C \cdot CF = (A + B + C)\ GH,$$

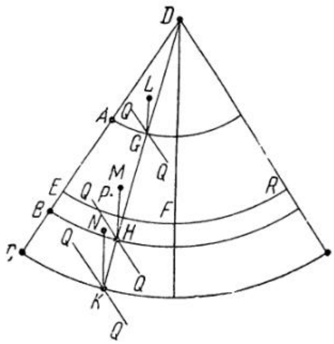
что и требовалось доказать.

Предложение IV

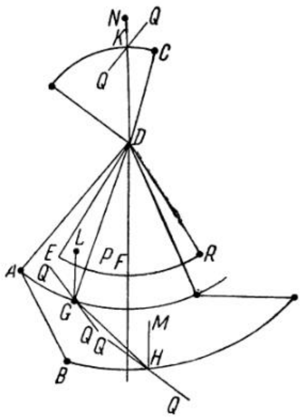
Маятник, состоящий из нескольких частей, выводят из положения равновесия и затем опускают. Маятник приходит в колебание, начинающееся с состояния покоя. Представим себе, что у маятника, после того как он совершит некоторую часть колебания, исчезнет связь частей между собой и каждая часть направляется вверх с приобретенной ею скоростью и поднимается насколько может; тогда общий центр тяжести всех частей достигнет опять той высоты, на которой был до начала колебания.

Пусть маятник состоит из произвольного числа частей A, B, C (фиг. 67 и 68), прикрепленных к невесомой линии или плоскости, и висит на оси, проходящей через D, нормально к плоскости рисунка. Пусть E — центр тяжести частей A, B, C — также лежит в плоскости рисунка. Пусть маятник поднят до такого положения, что линия центра DE маятника образует с отвесной линией DF угол EDF. Маятник отпускают, и он совершает часть колебания такую, что A, B, C приходят в положение G, H, K.

В этот момент связь частей исчезает и каждая часть направляется с приобретенной скоростью вверх (этого можно было бы достичь ударами о наклонные плоскости), поднимается так высоко, как может, т. е. до положения L, M, N. Когда частицы дойдут до этого положения, их общий центр тяжести будет в P. Я утверждаю, что P лежит на той



Фиг. 67.



Фиг. 68.

же высоте, что и E. Прежде всего P не может лежать выше, чем E, по первой из принятых нами гипотез. Остается показать, что P не лежит ниже E.

Предположим, что P лежит ниже E. Представим себе, что каждая часть снова падает с той высоты, на которую поднялась, т. е. с высот LG, MH и NK. Тогда каждая часть наверное приобретет ту скорость, которую имела до поднятия на эту высоту (по предложению IV второй части), т. е. ту скорость, которую приобрело при перемещении из положения $CBAD$ в положение $KHGD$. Если эти части с указанными скоростями подойдут к той поверхности или линии, с которой были скреплены, то они сейчас пристанут к ней и будут продолжать прежнее движение по начатым дугам. Это наступило бы, если бы части до соприкосновения со связями упали на наклонные плоскости QQ. Восстановленный таким образом маятник закончит свое колебание так, как будто никакого перерыва в его движении не было. Центр тяжести опишет при поднятии и спуске одинаковые дуги EF и FR и в R будет находиться на той же высоте, что и в E. Но мы приняли, что E выше P, центра тяжести частей в их положении L, M и N. Следовательно, R выше P, и, таким образом, центр тяжести частей, падающих из положения L, M, N, в конце концов, поднимается выше той высоты, с которой упал. Но это абсурдно (по гипотезе I этой части). Следовательно, центр тяжести P не может лежать ниже E. Он не лежит также и выше. Следовательно, он лежит на одинаковой высоте, что и требовалось доказать.

Предложение V

Дан маятник, состоящий из произвольного числа частей; множат вес каждой части на квадрат ее расстояния от оси колебаний. Если сумму этих произведений разделить на произведение, получающееся от умножения общего веса всех частей на расстояние общего центра тяжести от той же оси колебаний, то получается длина простого маятника, изохронного с данным сложным маятником, или расстояние между осью колебаний и центром качаний сложного маятника.[91]

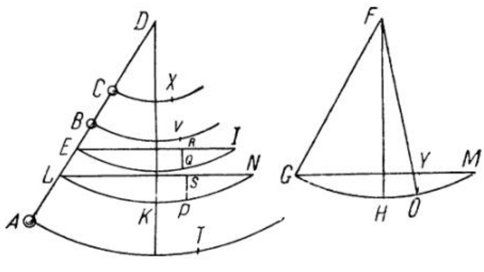
Пусть (фиг. 69 и 70) A, B, C — части, из которых состоит маятник и которые мы в дальнейшем будем рассматривать только со стороны их веса, а не со стороны их формы или размеров. Части подвешены к оси, которая проходит через D перпендикулярно к плоскости рисунка. В плоскости лежит общий центр тяжести E; то, что веса отдельных частей лежат в разных плоскостях, не имеет значения.

Расстояние ED от центра тяжести до оси колебаний обозначим d. Введем также обозначения $e = AD$, $f = BD$, $g = CD$. Если мы помножим веса a, b, c отдельных частей на квадраты их расстояний (от оси вращения), то сумма произведений будет $ae^2+bf^2+cg^2$. С другой стороны, произведение общей массы на d будет равно $ad+bd+cd$ (по предложению I этой части).[95]

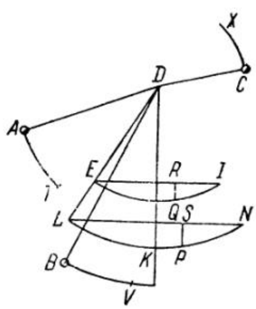
Если разделить вышеуказанную сумму на это произведение, то получается

$$\frac{ae^2+bf^2+cg^2}{ad+bd+cd}.$$

Если теперь выбрать длину простого маятника FG, которую назовем x, равной этой дроби, то я утверждаю, что



Фиг. 69.



Фиг. 70.

этот маятник будет изохронен нашему составному маятнику.

Пусть маятник FG и линия центра DE сложного маятника выведены из отвесных положений FH и DK на одинаковые углы и потом отпущены.

Тогда груз G маятника FG при полном колебании пройдет дугу GM, которая делится пополам отвесной линией FH. Если нанести на DE длину $DL=FG$, то точка L будет описывать дугу LN, которая совпадает с дугой GM и делится пополам отвесной линией DK. Центр тяжести опишет подобную дугу EI. Если взять на дугах GM и NL произвольные точки, но делящие эти дуги в том же отношении, напр. O и P, то будет показано, что скорость груза G в точке O та же, что и точки L в P. Отсюда будет следовать, что обе дуги проходятся в равные времена, и, следовательно, маятник FG и маятник, составленный из частей A, B, C, изохронны. Доказательство проводится следующим образом.

Допустим сначала, что скорость точки L в P больше, чем скорость груза G в O, если это возможно. В то время пока точка L пробегает дугу LP, центр тяжести несомненно пробегает подобную дугу EQ. Из точек Q, P и O проводим вертикали вверх, пересекающие хорды, относящиеся к дугам EI, LN и GM, в точках R, S и Y. Обозначим SP через y.

Из пропорции

$$SP:RQ=LD:ED,$$

или

$$y:RQ=x:d,$$

следует

$$RQ=\frac{dy}{x}.$$

Груз G имеет в O такую скорость, благодаря которой он может вновь подняться на ту высоту, с которой спустился, т. е. по дуге OM до M или по вертикали OY, которая равна PS до Y. Следовательно, при нашем предположении, точка L будет в P иметь бо́льшую скорость, чем та, которая достаточна для того, чтобы она могла подняться на высоту PS. Как раз в то время, в которое L пробегает дугу LP, точки A, B, C пробегают подобные дуги AT, BV, CX. И так как точки A и L связаны общей связью, то скорости L в точке P и A в точке T относятся, как DL к DA. Но квадрат скорости L в точке P будет относиться к квадрату скорости A в точке T, как высота, на которую способно подняться L благодаря своей скорости, к высоте на которую может подняться A благодаря своей скорости (по предложениям III и IV второй части). Следовательно, и $DL^2=x^2$ будет так относиться к $DA^2 = e^2$, как высота, на которую поднялось бы L благодаря своей скорости в точке P (эта высота по выше изложенному больше, чем y), к высоте, на которую, поднялось бы A благодаря скорости, приобретенной в точке T, если бы часть A, дойдя до T, отделилась от маятника и стала бы подыматься вверх — эта высота будет, следовательно, больше $\frac{e^2y}{x^2}$. Такое же рассуждение для точки B дает высоту поднятия B со скоростью, приобретенной в V, бо́льшую, чем $\frac{f^2y}{x^2}$.

Для точки C получим величину поднятия со скоростью, приобретенной в X, бо́льшую $\frac{g^2y}{x^2}$. Если помножить каждую из этих высот на относящийся к ней вес и сложить, то получится величина бо́льшая, чем $\frac{ae^2y}{x^2} + \frac{bf^2y}{x^2} + \frac{cg^2y}{x^2}$ и, следовательно, бо́льшая, чем $\frac{ady + bdy + cdy}{x}$. Последнее вытекает из того, что $x = \frac{ae^2 + bf^2 + cg^2}{ad + bd + cd}$ или

$$adx + bdx + cdx = ae^2 + bf^2 + cg^2.$$

Множим на y и делим на x^2, получаем

$$\frac{ady + bdy + cdy}{x} = \frac{ae^2y + bf^2y + cg^2y}{x^2},$$

чем и доказывается выше написанное соотношение.

Но указанная выше сумма произведений равна произведению суммы весов $(a + b + c)$ на высоту, на которую подняли бы центр тяжести, если бы все части подымались бы, каждая отдельно, вверх, насколько могли. Выражение $\frac{ady + bdy + cdy}{x}$ можно получить как произведение, если помножить сумму весов $a + b + c$ на высоту, на которую опустился центр тяжести именно этих частиц. Эта высота есть RQ или $\frac{dy}{x}$ (как мы нашли выше). Так как выше получилось, что первое произведение больше второго, то значит центр тяжести частиц A, B, C в случае, если частицы A, B, C, соответственно дойдя до T, V, X, оставят маятник и начнут двигаться вверх, поднимется на бо́льшую величину, чем он спустился раньше, когда маятник двигался из положения A, B, C в положение T, V, X. Это нелепо, так как, согласно предыдущему, высоты описанных подъема и спуска должны быть равны.

Если принять, что скорость L в точке P меньше, чем скорость груза G в точке O, то точно таким же способом можно было бы показать, что центр тяжести частиц A, B, C мог бы подняться только на меньшую величину, чем он раньше спустился. А это противоречит той же предыдущей теореме. Остается только признать скорость точки L в P равной скорости груза G в точке O. А из этого следует, что простой маятник FG изохронен сложному маятнику ABC.

Предложение VI

Дан маятник, состоящий из произвольного числа частей, имеющих одинаковый вес. Расстояние каждой части от оси колебаний возводят в квадрат, далее умножают расстояние общего центра тяжести от оси колебаний на число частей; если теперь разделить сумму квадратов на последнее произведение, то получится длина простого маятника, который изохронен сложному.[96]

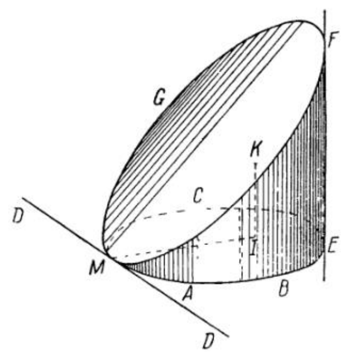
Пусть выполнены те же предположения, как и в предыдущем, только теперь все веса частей равны и равны, скажем, a. Здесь им не приписывается никакой определенной величины, но размеры их принимаются чрезвычайно малыми.

Тогда длина простого изохронного маятника равна $\frac{ae^2 + af^2 + ag^2}{ad + ad + ad}$. Если сократить эту дробь на a, то для длины изохронного маятника получится выражение $\frac{e^2 + f^2 + g^2}{3d}$, т. е. надо расстояние каждой части от оси колебаний возвести в квадрат, помножить расстояние от центра тяжести до оси колебаний на число частиц, т. е. в данном случае на три, и разделить сумму квадратов на последнее произведение. Легко видеть, что расстояние d необходимо помножить именно на число частей. Тем самым теорема доказана.

Если одинаковые веса расположены по прямой линии, и эта линия подвешена за один конец, то при помножении расстояния общего центра тяжести на число частиц получится сумма расстояний всех частиц от оси колебаний (по предложению II этой части); следовательно, в этом случае можно определить длину простого маятника, изохронного со сложным, как сумму квадратов расстояний всех частиц от оси колебаний, разделенную на сумму расстояний всех частиц от оси колебаний.[97]

Определение XIV

Пусть в некоторой плоскости имеется фигура; к фигуре проведена лежащая в той же плоскости прямая, касающаяся фигуры с внешней стороны. Другая прямая, перпендикулярная к плоскости, обводится по контуру фигуры и описывает таким образом поверхность. Через касательную проводят вторую плоскость, наклонную к первой; обе плоскости вырежут из поверхности, образованной прямой, проведенной по контуру фигуры, некоторую часть. Тело ограниченное этой частью поверхности и двумя плоскостями, назовем клином, построенным на нашей фигуре, как на основании.[98]



Фиг. 71.

На рисунке (фиг. 71) $ABCE$ — данная фигура, MD — касательная, EF — прямая, обводимая вокруг контура. Клином будет тело, заключенное между плоскостями $ABEC$ и MFG и частью поверхности, описываемой прямой EF.

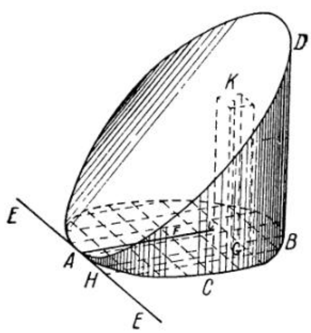
Определение XV

Если из центра тяжести клина опустить перпендикуляр на основание клина, то расстояние между основанием перпендикуляра и касательной к фигуре будем называть субцентрикой клина.[99]

Если на фигуре (фиг. 71) K изображает центр тяжести клина, KI — перпендикуляр, опущенный из центра тяжести на основание, тогда перпендикуляр IM, в свою очередь опущенный из I на MD, будет субцентрикой клина.

Предложение VII

Пусть над произвольной фигурой как над основанием построен клин, обе плоскости которого образуют угол 45°. Тогда клин имеет такой же объем, как цилиндр, имеющий ту же фигуру основания, а высотой — расстояние центра тяжести фигуры от касательной, использованной для построения клина.[100]



Фиг. 72.

Пусть над плоской фигурой ACB (фиг. 72) построен клин ABD, обе плоскости которого образуют между собой угол 45°; EE — касательная к фигуре ACB, F — центр тяжести фигуры ACB, FA — перпендикуляр, опущенный из центра тяжести фигуры на прямую EE.

Я утверждаю, что объем клина равен объему цилиндра с основанием, равным фигуре ACB, и с высотой, равной FA. Разделим фигуру на большое число крайне малых равных частей. Пусть одна из них G. Если помножить каждую часть на ее растояние от EE, тогда сумма таких произведений будет равна произведению расстояния AF на сумму всех частей (по предложению I этой части), т. е. равна цилиндру с основанием ACB и высотой AF. Теперь произведение каждой части G на расстояние GH равно объему призмы, построенной на этой части и доходящей до косой плоскости, так как высота призм равна расстоянию HG ввиду того, что обе плоскости, AD и ACB, образуют угол 45°. Очевидно, однако, что все призмы вместе образуют объем цилиндра клина. Следовательно, и клин по объему равен цилиндру с основанием ACB и высотой FA, что и требовалось доказать.

Предложение VIII

Прямая линия касается плоской фигуры. Разлагаем эту фигуру на большое число чрезвычайно малых равных частиц и из каждой части опускаем перпендикуляр на указанную прямую. Тогда сумма всех квадратов длин этих перпендикуляров равна произведению из числа частей на прямоугольник, одной стороной которого является расстояние от центра тяжести фигуры до той же прямой, а другая сторона есть субцентрика клина, построенного при помощи этой прямой над фигурой.[101]

Сохраняем построение предыдущего предложения (фиг. 72). Прибавим к нему еще линию LA — субцентрику клина (перпендикулярную EE). Надо показать, что сумма всех квадратов расстояний частиц G фигуры ACB равна произведению из числа частиц n на прямоугольник со сторонами FA и LA.

Из предыдущей теоремы следует, что высота каждой призмы, например GK, равна расстоянию соответствующей части G от прямой AE. При этом произведение призмы GK на расстояние GH равно произведению частиц G площади ACB на квадрат расстояния GH. То же и со всеми другими частями. Сумма всех произведений этого рода равна произведению объема клина ABD на расстояние LA (по предложению I этой части), так как центр тяжести клина расположен над точкой L. Поэтому $\sum[G \cdot GH^2] = (ABD) \cdot LA$, где (ABD) — объем клина. Так как по предыдущей теореме объем клина (ABD) равен произведению площади (ACB) на расстояние FA, т. е.

$$(ABD) = (ACB) \cdot FA,$$

то мы имеем:

$$\sum[G \cdot GH^2] = (ACB) \cdot FA \cdot LA.$$

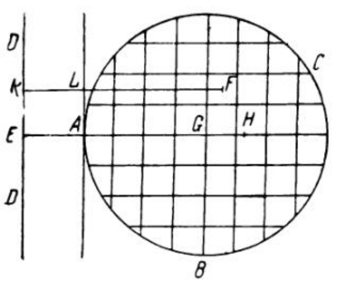
$$G\sum(GH^2) = nG \cdot FA \cdot LA,$$

$$\sum(GH^2) = nFA \cdot LA,$$

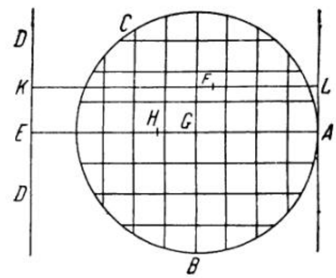
что и требовалось доказать.

Предложение IX

Дана плоская фигура и в той же плоскости прямая, пересекающая или не пересекающая фигуру. Делим фигуру на чрезвычайно малые равные части и из каждой части опускаем перпендикуляр на прямую.



Фиг. 73.



Фиг. 74.

Вычислить сумму квадратов длин этих перпендикуляров или найти фигуру, которая, будучи помножена на число частиц, дает указанную сумму.[102]

Пусть ABC (фиг. 73, 74) — данная фигура, ED — прямая, лежащая в той же плоскости. Фигуру представляем себе разделенной на чрезвычайно малые равные части. Одна из них F. Из каждой части на прямую ED опущен перпендикуляр, напр. FK. Ищется $\sum(FK^2)$.

Строим касательную AL, параллельную ED и лежащую целиком вне фигуры. Она может касаться фигуры с той же стороны, что и ED, или с противоположной. Пусть G — центр тяжести фигуры, GA — его расстояние от касательной AL; GA пересекает ED в точке E. HA — субцентрика клина, который можно построить над ABC, используя касательную AL, тогда я утверждаю, что искомая сумма квадратов длин перпендикуляров равна помноженной на число частиц сумме прямоугольника, построенного на AG и GH и квадрата EG.

$$\sum(FK^2) = n(AG \cdot GH + EG^2).$$

Прямая FK, или ее продолжение, пересекает AL в точке L.

Сначала предположим, что прямая ED лежит совершенно вне фигуры и касательная AL проведена с той же стороны, что и ED. Тогда теорема доказывается следующим образом.

Мы имеем

$$\sum(KF^2) = \sum(KL^2) + 2\sum(KL \cdot LF) + \sum(LF^2),$$

но

$$\sum(KL^2) = n \cdot KL^2 = n \cdot EA^2$$

и по теореме II этой части

$$\sum LF = n \cdot GA,$$

отсюда

$$\sum KL \cdot LF = n \cdot EA \cdot AG.$$

Наконец, по предыдущей теореме

$$\sum(LF^2) = n \cdot HA \cdot GA = n(AG^2 + AG \cdot GH).$$

Следовательно,

$$\sum(KF^2) = n[EA^2 + 2EA \cdot AG + AG^2 + AG \cdot GH] = \\ = n[EG^2 + AG \cdot GH],$$

что и требовалось доказать.

Во всех других случаях (фиг. 75 и 76)

$$\sum(FK^2)=\sum\{(KL^2)-2KL\cdot LF+LF^2\}=$$
$$=n\{EA^2-2EA\cdot AG+AG^2+AG\cdot GH\},$$

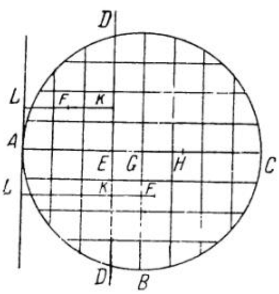
но во всех этих случаях

$$EA^2-2EA\cdot AG+AG^2=EG^2,$$

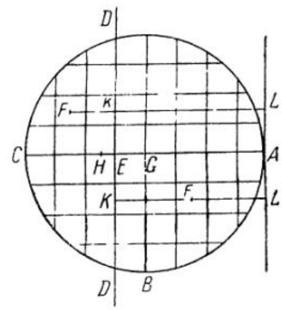
Следовательно, опять

$$\sum(EK^2)=n\{EG^2+AG\cdot GH\},$$

и теорема доказана.



Фиг. 75.



Фиг. 76.

Отсюда следует, что прямоугольник $AG\cdot GH$ имеет всегда ту же величину, безразлично подымается ли клин в одну или другую сторону, т. е. независимо от того, какую из двух касательных, параллельных AL, мы используем для построения, т. е. AG первого случая относится к AG второго случая, как GH второго случая к GH первого случая. Из теоремы VII этой части следует, что объем клина, определенного AL, пропорционален AG. Следовательно, объемы, получающиеся в одних случаях, обратно пропорциональны соответствующей величине GH.

Далее видно, что при данном G и субцентрике, соответствующей клину одной из двух параллельных касательных, известна и субцентрика другого клина, соответствующего второй параллельной касательной.[10]

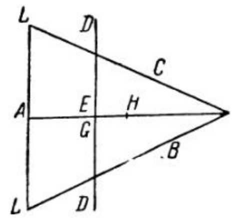
Предложение X

Сохраним построение предыдущей теоремы, но пусть теперь прямая ED (фиг. 77) проходит через центр тяжести G фигуры ABC; если мы разделим снова фигуру на чрезвычайно малые равные части и из каждой части опустим перпендикуляр на ED, то теперь сумма квадратов длин всех этих перпендикуляров равна произведению из числа частиц на прямоугольник $AG \cdot GH$.

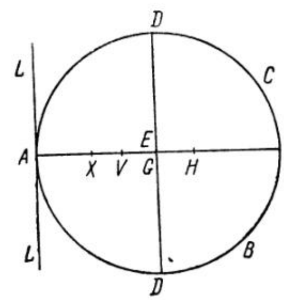
Это очевидно, так как в данном случае $EG^2 = 0$.

Предложение XI

Пусть опять выполнены условия предпоследней теоремы, но пусть теперь (фиг. 78) DE есть ось фигуры ABC, де-



Фиг. 77



Фиг. 78

лящая ее на две равные и подобные части. Пусть центр тяжести половина DAD фигуры отстоит на VG от прямой ED и пусть GX есть субцентрика клина, построенного на основании этой половины фигуры с использованием самой прямой ED, тогда[104]

$$XG \cdot GV = AG \cdot GH.$$

Если половина фигуры разделена на n частей, следовательно вся фигура на $2n$ частей, то по теореме VIII этой части

$$nXG \cdot GV = \sum d^2,$$

где d — расстояние одной части от DE и суммирование распространяется на половину фигуры DAD.

Для всей фигуры ABC имеем:

$$2n \cdot XG \cdot GV = \sum d^2,$$

где d имеет то же значение, что прежде, но суммирование распространено на все части фигуры ABC.

По предыдущей теореме

$$\sum d^2 = 2n \cdot AG \cdot GH.$$

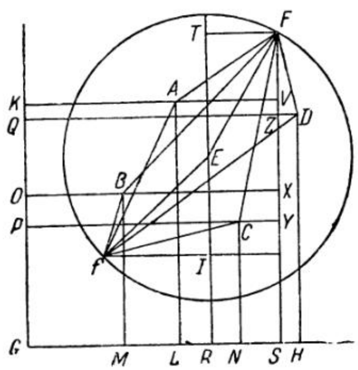
Следовательно,

$$XG \cdot GH = AG \cdot GH,$$

что и требовалось доказать.

Предложение XII

Дано произвольное число точек в плоскости. Описываем произвольный круг вокруг их центра тяжести. Соединяем произвольно выбранную точку на окружности круга со всеми данными точками, тогда сумма квадратов длин этих соединительных линий имеет всегда одно и то же значение.[105]



Фиг. 79.

Пусть (фиг. 79) A, B, C, D — данные точки, E — их центр тяжести или центр тяжести ряда одинаковых тел, которые мы мыслим на их местах. Вокруг E описан круг произвольного радиуса. На окружности берется произвольная точка, например F, и соединяется с данными точками. Я утверждаю, что сумма квадратов длин соединительных линий имеет всегда одно значение, независимо от того, где бы на окружности ни находилась точка F.

Начертим две взаимно перпендикулярные линии GH и GK так, чтобы все наши точки были бы по одну сторону от каждой; из каждой точки опускаем перпендикуляры на обе прямые AL и AK, BM и BO, CN и CP, DH и DQ. Из центра тяжести E и из точки F опускаем перпендикуляры только на одну прямую: ER и FS. Кроме того, на прямую FS опускаются перпендикуляры AV, BX, CY, DZ и, наконец, из F на ER — перпендикуляр FT. Введем обозначения:

$$\begin{array}{llll} AL=a; & AK=e; & \text{радиус} & EF=z; \\ BM=b; & BO=f; & & GS=x. \\ CN=c; & CP=g; & & \\ DH=d; & DQ=h; & & \end{array}$$

Обозначим число точек через θ.

Ввиду того, что E — центр тяжести всех точек, мы по предложению II этой части имеем уравнение:

$$ER=\frac{AL+BM+CN+DH}{\theta}=\frac{a+b+c+d}{\theta}.$$

Равным образом, по той же причине, перпендикуляр, опущенный из E на GK, или длина RG, равна

$$\frac{AK+BO+CP+DQ}{\theta}=\frac{e+f+g+h}{\theta}.$$

Обозначим

$$a+b+c+d=l; \quad e+f+g+h=m.$$

Имеем

$$ER=\frac{l}{\theta}; \quad RG=\frac{m}{\theta}.$$

Так как $GS=x$, то

$$RS=FT=x-\frac{m}{\theta} \quad \text{или} \quad \frac{m}{\theta}-x, \text{ если } GR \text{ больше } GS.$$

Во всяком случае

$$FT^2=x^2-2x\frac{m}{\theta}+\left(\frac{m}{\theta}\right)^2.$$

Вычитая это из $FE^2 = z^2$, имеем

$$TE^2 = z^2 - x^2 + 2x\frac{m}{\theta} - \left(\frac{m}{\theta}\right)^2;$$

$$TE = \sqrt{z^2 - x^2 + 2x\frac{m}{\theta} - \left(\frac{m}{\theta}\right)^2}.$$

Мы имели

$$ER = \frac{l}{\theta},$$

поэтому

$$TR = \frac{l}{\theta} \pm \sqrt{z^2 - x^2 + 2x\frac{m}{\theta} - \left(\frac{m}{\theta}\right)^2} = y,$$

где длина TR для краткости обозначена через y.

Определим теперь сумму всех квадратов

$$FA^2 + FB^2 + FC^2 + FD^2.$$

Имеем

$$AF^2 = AV^2 + VF^2.$$

Но

$$AV = VK - AK = x - e, \text{ или } e - x$$

и

$$AV^2 = x^2 - 2ex + e^2.$$

$$VF = FS - VS = FS - AL = y - a, \text{ или } a - y.$$

$$VF^2 = y^2 - 2ay + a^2.$$

Сложив AB^2 и VF^2, находим

$$AF^2 = x^2 - 2ex + e^2 + y^2 - 2ay + a^2.$$

Таким же способом находим FB^2, FC^2, FD^2.

Расположив квадраты по порядку, находим

$$\begin{aligned} FA^2 &= x^2 - 2ex + e^2 + y^2 - 2ay + a^2; \\ FB^2 &= x^2 - 2fx + f^2 + y^2 - 2by + b^2; \\ FC^2 &= x^2 - 2gx + g^2 + y^2 - 2cy + c^2; \\ FD^2 &= x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2dy + d^2. \end{aligned}$$

Положим

$$e^2 + f^2 + g^2 + h^2 = n^2$$

и

$$a^2+b^2+c^2+d^2=k^2.$$

Тогда

$$FA^2+FB^2+FC^2+FD^2=\theta x^2-2mx+n^2+\theta y^2-2ly+k^2,$$

так как θ есть число точек, следовательно, и число квадратов, и мы ввели обозначения

$$e+f+g+h=m;$$
$$a+b+c+d=l.$$

Подставим теперь вместо y его значение,

$$y=\frac{l}{\theta}\pm\sqrt{z^2-x^2+2\frac{xm}{\theta}-\frac{m^2}{\theta^2}}.$$

Тогда

$$\theta y^2=\frac{l^2}{\theta}\pm 2l\sqrt{z^2-x^2+2\frac{xm}{\theta}-\frac{m^2}{\theta^2}}+\theta z^2-\theta x^2+2xm-\frac{m^2}{\theta}$$

и

$$-2ly=-2\frac{l}{\theta}\pm 2l\sqrt{z^2-x^2+2\frac{xm}{\theta}-\frac{m^2}{\theta^2}}.$$

Следовательно,

$$\theta y^2-2ly=-\frac{l^2}{\theta}+\theta z^2-\theta x^2+2xm-\frac{m^2}{\theta}.$$

Для суммы четырех квадратов получаем

$$FA^2+FB^2+FC^2+FD^2=\theta z^2+n^2+k^2-\frac{m^2+l^2}{\theta}.$$

Все величины справа от знака равенства известны. Мы получим для суммы квадратов всегда одинаковую величину, где бы на окружности ни находилась точка F.

Пусть теперь данные весомые точки имеют различные, соизмеримые между собой веса. Например, веса точек A, B, C, D, могут относиться друг к другу, как $2:3:4:7$. Мы ищем опять их центр тяжести. Описываем около него круг, берем точку на окружности и соединяем ее с данными точками. Тогда я утверждаю, что сумма квадратов длин соединительных линий, умноженных на веса соответственных точек, имеет всегда одно значение, независимо от положения выбранной на окружности точки. В нашем примере

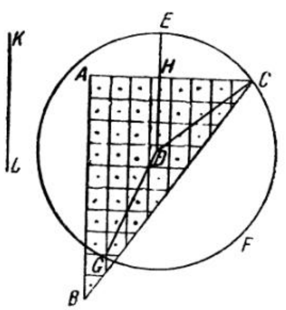
$$2AF^2 + 3BF^2 + 4CF^2 + 7DF.$$

Это следует из предыдущего доказательства, надо только представить себе точки многократными. В A соединены две точки, в B — три точки, и так далее.

Все точки одинакового веса.

Предложение XIII

Пусть плоская фигура или кривая, расположенная в одной плоскости, подвешивается то в одной, то в другой точке, но только в точках, лежащих в этой плоскости и всегда одинаково отстоящих от центра тяжести фигуры или кривой, то фигура или кривая при боковых колебаниях всегда изохронна сама с собой.



Фиг. 80.

Пусть ABC (фиг. 80) — плоская фигура или кривая; D — ее центр тяжести; опишем вокруг D в плоскости фигуры круг ECF. Я утверждаю, что при подвешивании в любой точке окружности ECF, например, E, C или G, наша фигура, колеблясь в своей плоскости, будет всегда изохронна самой себе или одному и тому же простому маятнику.

Пусть сначала E будет точкой подвеса. Если эта точка находится вне нашего тела, то надо представить себе ее жестко соединенной с телом невесомой линией EH.

Разделим мысленно наше тело на равные малые части и соединим центр тяжести каждой части с E, тогда, очевидно, все эти соединительные линии будут перпендикулярны к оси колебаний, если фигура колеблется в своей плоскости. По теореме VI этой части мы найдем длину KL простого маятника, изохронного с нашим маятником, если образуем квадраты длин всех этих соединительных линий и сумму этих квадратов разделим на произведение длины ED на число частей, на которое разделен маятник. Если маятник подвешен в G, то (по теореме VI) опять найдется длина простого маятника, изохронного с данным, если соединить каждую часть с G и образовать сумму квадратов соединительных линий и разделить ее на произведение расстояния GD на число частей, на какое разделено тело. Но G и E лежат на круге с D в центре, где D — центр тяжести маятника ABC. Следовательно, по предыдущей теореме сумма квадратов соединительных линий будет одна и та же, независимо от того, какая точка на окружности будет взята.

Знаменатели, на которые мы делим сумму квадратов в обоих наших случаях, равны. Следовательно, при подвесе в G мы получим ту же длину KL для изохронного простого маятника, как и при подвесе в E.

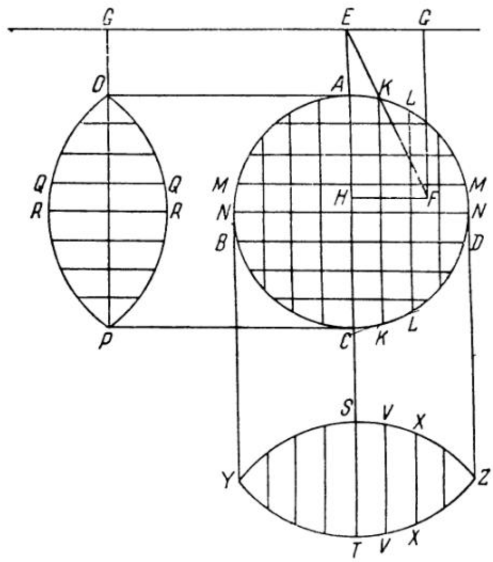
Ту же длину KL мы получим при подвешивании маятника в C или любой другой точке окружности, и теорема доказана.

Предложение XIV

Дано тело и прямая неопределенной длины, которая или вся лежит вне тела, или пересекает его; представим себе мысленно тело разделенным на равные малые части и из каждой части опустим перпендикуляр на данную прямую. Требуется вычислить сумму квадратов длин всех этих перпендикуляров или найти фигуру, площадь которой, будучи помножена на число частей, дала бы названную сумму крадратов.[106]

Пусть (фиг. 81) $ABCD$ — данное тело. Данная прямая проходит через E перпендикулярно к плоскости чертежа. Прямая или пересекает тело или целиком лежит вне тела.

От каждой малой части, на которые разбито тело $ABCD$, например от F, опустим перпендикуляр на данную прямую, как, например, FE; и надо вычислить сумму квадратов длин всех этих перпендикуляров. Пересечем фигуру плоскостью EAC, проходящей через заданную прямую и через центр тяжести фигуры. Проведем через заданную прямую E вторую плоскость



Фиг. 81

EG, перпендикулярную первой плоскости. Для каждой малой части будет справедливо уравнение $FE^2 = FG^2 + FH^2$, где FG и FH — перпендикуляры, опущенные из F на обе, ранее определенные плоскости EG и EC (теорема 47 первой книги Эвклида). Если мы можем вычислить сумму квадратов перпендикуляров, опущенных из всех частичек на плоскость EG, и сумму квадратов перпендикуляров, опущенных из всех частиц на плоскость EC, то мы будем знать и сумму квадратов перпендикуляров, опущенных из всех частиц на прямую, проходящую через E.

Первая из двух сумм вычисляется следующим образом. Рядом с телом $ABCD$ располагаем плоскую фигуру OQP, имеющую ту же высоту, что и наше тело. Очертания фигуры определяются из следующих соображений. Параллельным плоскостям MM, NN, и т. д., пересекающим тело, у фигуры соответствуют линии (хорды) QQ, RR, ..., пересекающие плоскую фигуру. Пусть длины получающихся хорд находятся между собой в том же отношении, как и площади соответствующих сечений тела, т. е. $QQ:RR = MM:NN$. Затем представим себе, что плоская фигура разделена на то же число мелких частей, как и тело, тогда в каждом участке плоской фигуры, например $QQRR$, будет находиться столько же частей, как в соответствующем участке $MMNN$ тела.

Следовательно, сумма квадратов перпендикуляров, опущенных из частей фигуры OQP на плоскость EG, будет равна сумме квадратов перпендикýляров, опущенных из частей тела на ту же плоскость EG. Первая сумма квадратов известна, если в фигуре OQP и в клине, на ней построенном, дано то, что требуется для предложения IX этой части. Когда это дано, то известна и сумма квадратов перпендикуляров, опущенных от всех частей тела $ABCD$ на EG.

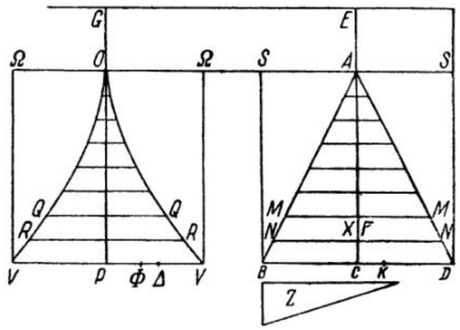
Теперь начертим вторую плоскую фигуру $SYTZ$, имеющую ту же ширину, что и тело $ABCD$, т. е. лежащую между плоскостями BY и DZ, касающимися тела и параллельными EAC. В соответствии с пересекающими тело параллельными плоскостями KK, LL, нашу фигуру будут пересекать хорды VV, XX, и т. д.; пусть эти хорды имеют между собой то же отношение, как и площади сечений. Тогда опять сумма квадратов всех перпендикуляров, которые можно опустить из отдельных точек $SYTZ$ на прямую ST. будет равна сумме квадратов всех перпендикуляров, опущенных из частей тела на плоскость AC. Первая сумма будет известна, если известно расстояние центра тяжести фигуры $STYZ$ от прямой BY или DZ и расстояние, на которое отстоит от той же прямой центр тяжести клина. построенного при использовании той же прямой (по предложению IX этой части). Если фигура $SYTZ$ симметрична и ST — ось фигуры $SYTZ$, то искомая сумма квадратов будет известна, если даны расстояния, на которые отстоят от ST центр тяжести половины SZT фигуры и центр тяжести клина, построенного на этой половине, с использованием той же оси (по предложению XI этой части). Если эти отрезки даны, то известна сумма квадратов всех перпендикуляров, опущенных из отдельных частей тела ABC на плоскость EAC. Но мы нашли также сумму квадратов всех перпендикуляров, опущенных из отдельных частей ABC на плоскость EG. Следовательно, известна и сумма этих двух сумм, т. е., как показано выше, сумма квадратов перпендикуляров, опущенных из отдельных точек тела на данную, проходящую через E прямую, перпендикулярную к плоскости рисунка. Это и есть задача, которую надо было решить.

Предложение XV

Примем те же условия, как и в предыдущем предложении но пусть на этот раз у фигуры $SYTZ$, пропорциональной телу $ABCD$ (фиг. 81), не известно расстояние центра тяжести от касательной BY или DZ, или не известна субцентрика клина, построенного на фигуре $SYTZ$ с использованием прямой BY или прямой DZ; зато для начерченной рядом с телом $ABCD$ пропорциональной фигуры OQP дано ΦP — расстояние, на которое центр тяжести половины фигуры OPV (фиг. 82) отстоит от оси фигуры OP. Тогда возможно определить сумму квадратов всех перпендикуляров, опущенных от отдельных малых частей тела на плоскость EC. Но только все фигуры сечений NN, MM и т. д. должны быть подобными фигурами и центры тяжести всех фигур должны лежать в плоскости EC, как это имеет место у цилиндра, пира-

миды, конуса и многих других тел. И для каждой фигуры должно быть известно расстояние центра тяжести от одной из касательных, параллельных оси колебаний, а также субцентрика клина, который можно построить на фигуре с использованием той же касательной.

Пусть (фиг. 82) BD представляет наибольшее из сечений. Вообразим прямую через B, параллельную оси колебаний E, т. е. перпендикулярную плоскости рисунка, тогда должны быть известны расстояние центра тяжести фигуры сечения от этой линии, т. е. отрезок BC и субцентрика клина, построенного над фигурой сечения с использованием как раз этой прямой, проведенной через B. Пусть эта субцентрика есть BK.



Фиг. 82.

Разделим PV в Δ пополам и определим площадь Z так, чтобы Z так относилось к площади прямоугольника со сторонами BC и CK. как $P\Phi$ к ΔP.

Тогда я утверждаю, что эта площадь Z, помноженная на число частей, на которые разделено тело, представляет искомую сумму квадратов расстояний этих частиц от плоскости EC.[107]

Действительно, сумма квадратов перпендикуляров, опущенных из отдельных частей сечения BD на плоскость EC, проходящую через центр тяжести сечения, или сумма квадратов перпендикуляров, опущенных из отдельных малых частей объемной зоны $BNND$ на ту же плоскость, несомненно равна произведению $BC \cdot CK$ на число названных частиц (по предложению X этой части).

Представим себе подобным же образом прямую, проведенную через N параллельно оси E, пусть центр тяжести сечения NN отстоит от этой прямой на NX и пусть клин, построенный на этом сечении с использованием как раз этой прямой, имеет субцентрику NF; тогда квадраты перпендикуляров, опущенных из отдельных частей фигуры сечения NN на плоскость EC, или квадраты перпендикуляров, которые можно опустить на ту же плоскость из отдельных частей объемной зоны $NMMN$, дадут сумму, равную произведению прямоугольника $NX \cdot XF$ на число частиц, на которые разделено сечение NN или объемная зона $NMMN$. Но BD разделено в C и K в том же отношении, как NN в X и F; следовательно:

$$(BC \cdot CK):(NX \cdot XF) = BD^2 : NN^2.$$

Число частей в сечении BD относится к числу частей в сечении NN, как площади самих этих фигур, т. е. как BD^2 к NN^2. Поэтому произведение из прямоугольника $BC \cdot CK$ на число частей фигуры BD относится к произведению из прямоугольника $NX \cdot XF$ на число частей фигуры NN, как $BD^4 : NN^4$, т. е. как $VV^2 : RR^2$ в пропорциональной фигуре.

Таким образом, сумма квадратов перпендикуляров, опущенных из зоны $BNND$ на плоскость EC, относится к сумме квадратов перпендикуляров, опущенных из зоны $NMMN$, как $VV^2 : RR^2$. Таким же образом можно показать, что и в других зонах тела $ABCD$ сумма квадратов перпендикуляров, опущенных из всех отдельных частей зоны на плоскость EC относятся друг к другу, как квадраты хорд фигуры OVV, которые соответствуют основаниям соответствующих зон. Представим себе тело, составленное из такого же числа зон, как тело $ABCD$, но у которого каждая зона равна наибольшей зоне $ABCD$, т. е. представим себе цилиндр или призму $BDSS$, имеющую то же основание BD и ту же высоту BS, как тело $ABCD$. Тогда сумма квадратов перпендикуляров, опущенных из всех частей всех зон тела $ABCD$ на плоскость EC, будет относиться к соответственной сумме квадратов нового тела, как сумма $VV^2 + RR^2 + QQ^2$ к сумме такого же числа членов, которые все равны VV^2, т. е. как объем тела, полученного вращением фигуры OVV вокруг оси OP к объему цилиндра $VV\Omega\Omega$, имеющему то же основание и ту же высоту. Но объемы таких тел вращения относятся, как произведения из площади фигуры, при помощи которой образовано тело вращения, на расстояние центра тяжести этой фигуры от оси вращения,[108] т. е.

$$\frac{\text{(объем) тела вращения } OVV}{\text{объем цилиндра } VV\Omega\Omega} = \frac{\text{площадь фигуры } OPV \cdot P\Phi}{\text{прямоугольник } PV\Omega O \cdot P\Delta}.$$

Площадь фигуры OPV относится к площади прямоугольника $PV\Omega O$, как тело $ABCD$ к цилиндру или призме $BDSS$, т. е. как число частиц, содержащихся в теле $ABCD$, к числу частиц, содержащихся в призме $BDSS$. А по построению $\frac{P\Phi}{P\Delta} = \frac{\text{площадь } Z}{\text{прямоугольник } BC \cdot CK}$; если вставить эти соотношения, то получится следующий результат. Сумма квадратов перпендикуляров, опущенных из всех частей тела $ABCD$ на площадь EC, относится к сумме квадратов перпендикуляров, опущенных из всех частей цилиндра или призмы $BDSS$ на ту же плоскость, как произведение из площади фигуры Z и числа заключенных в теле $ABCD$ отдельных малых частиц к произведению из площади $BC \cdot CK$ и числа отдельных частей, заключенных в цилиндре. В этой пропорции равны знаменатели с обеих сторон, так как по предложению X этой части произведение прямоугольника $BC \cdot CK$ на число частей, заключенных в зоне $BNND$, равно сумме квадратов всех перпендикуляров, которые можно опустить из отдельных частей этой зоны на плоскость EC; а отсюда и произведение из того же прямоугольника $BC \cdot CD$ на число частиц, заключенных в цилиндре или призме, равно сумме квадратов всех перпендикуляров, которые можно опустить из всех отдельных частей призмы или цилиндра на плоскость EC. Так как в пропорции знаменатели равны, то будут равны и числители, т. е. сумма квадратов перпендикуляров, спущенных из отдельных частей тела $ABCD$ на плоскость EC равна произведению площади фигуры Z на число частей, на которое можно разделить тело $ABCD$ (по теореме 14 V книги Эвклида), что и требовалось доказать.

При этом необходимо отметить следующее. Если тело ABD есть тело вращения с осью AC, то прямоугольник $BC \cdot CK$ всегда равен $\frac{1}{4}\ BC^2$, так как субцентрика BK клина, построенного на круге BD с использованием касательной в B, равен $\frac{5}{4}\ BC$.[109] Если, кроме того, $PV = BC$, то

$$BC \cdot CK = P\Delta^2$$

и так как

$$\frac{Z}{BC \cdot CK} = \frac{P\Phi}{\Delta P},$$

то подстановкой получается

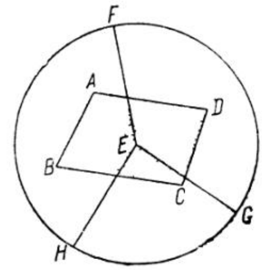
$$Z = P\Phi \cdot \Delta P.$$

Таким образом, в этом случае сумма квадратов перпендикуляров, опущенных из отдельных частей тела $ABCD$ на плоскость EC, равна произведению $P\Phi \cdot P\Delta$, помноженному на число частиц, на которое разложено тело.

Предложение XVI

Если какой-либо маятник: линию, плоскость или тело подвешивать в разных точках, но всегда так, чтобы оси колебаний были параллельны между собой, и всегда на том же расстоянии от центра тяжести маятника, то маятник при всех подвешиваниях остается изохронным самому себе.

Пусть $ABCD$ (фиг. 83) представляет какой-либо маятник.[110] Пусть его центр тяжести находится в E и пусть маятник сначала колеблется около оси, проходящей через F, перпендикулярно к плоскости рисунка, тогда площадь рисунка совпадает с плоскостью колебаний. Опишем около E круг радиусом EF и возьмем на окружности круга любую точку, например H. Вообразим, что маятник теперь подвешен в H к оси, также перпендикулярно плоскости рисунка, и, следовательно, колеблется опять в плоскости рисунка. Я утверждаю, что период этих колебаний тот же, как и при подвешивании в F.



Фиг. 83.

Мысленно разобьем маятник на очень малые равные частицы. Из каждой частицы опустим перпендикуляр на плоскость колебаний. Так как при обоих подвешиваниях плоскость колебания та же, то и основания перпендикуляров окажутся в тех же точках этой площади. Пусть это будут точки A, B, C, D.

Так как E — центр тяжести маятника, то маятник, в случае вращения около оси, проходящей через E перпендикулярно к плоскости рисунка $ABCD$, будет в равновесии в любом положении.

Если приписать всем точкам, указанным в плоскости $ABCD$, одинаковую тяжесть, то и их общий центр тяжести будет в точке E, как легко видеть. Если же, как это легко может случиться, несколько оснований перпендикуляров совпадут в одной точке, то надо считать в этой точке совпадение нескольких точек и приписать ей вес соответственной кратности. После этого, очевидно, центр тяжести опять окажется в точке E.[111]

Если соединить все означенные точки с F, то сумма квадратов длин соединительных линий будет равна сумме квадратов длин перпендикуляров, опущенных из всех отдельных частиц маятника на ось колебания, проходящую через F, так как длины, квадраты которых надо суммировать, будут в обоих случаях одинаковы. Точно так же в случае прохождения оси колебаний через H сумма квадратов всех отрезков, соединяющих отдельные точки фигуры $ABCD$ с H, будет равна сумме квадратов всех перпендикуляров, опущенных из всех отдельных частиц маятника, на ось вращения, проходящую через H.

В обоих случаях длина изохронного простого маятника получается, если разделить сумму квадратов отрезков, соединяющих упомянутые точки с соответствующей осью, на произведение длины EF или EH на число частей, на которое поделен маятник. Но сумма квадратов отрезков в обоих случаях одна и та же (по предложению XII этой части), равны также EF и EH и число частиц остается тем же. Поэтому и результат действий в обоих случаях одии и тот же, т. е. длина простого маятника, изохронного с нашим составным, одна и та же, будет ли составной маятник подвешен в H или F. И теорема доказана.

Предложение XVII

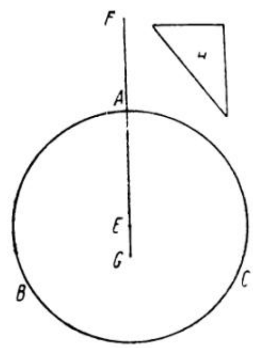
Представим себе наш маятник разложенным на ряд очень маленьких одинаковых частиц; пусть из каждой частицы опущен перпендикуляр на ось колебаний; пусть дана плоская фигура, площадь которой, будучи помножена на число указанных частиц, дает сумму квадратов длин указанных перпендикуляров; тогда длина простого маятника, изохронного с нашим, получается путем деления (площади) упомянутой плоской фигуры на расстояние между центром тяжести маятника и его осью колебаний.[112]

Пусть ABC (фиг. 84) — наш маятник, E — его центр тяжести, ось колебаний проходит через F и перпендикулярна к плоскости рисунка.

Мысленно разделим маятник на очень большое число равных очень малых частей и из каждой частицы опустим перпендикуляр на ось вращения. Пусть H — фигура, площадь которой, будучи умножена на число частиц, равна сумме квадратов указанных перпендикуляров. Пусть

$$H : FE = FG.$$

Я утверждаю, что FG — длина простого маятника, изохронного с нашим, колеблющимся около оси, проходящей через F.



Фиг. 84.

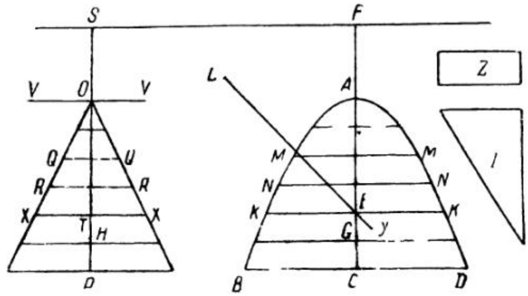
Действительно, по теореме VI этой части сумма квадратов отрезков перпендикуляров от частицы до оси, разделенная на расстояние FE и на число частиц, дает длину изохронного простого маятника. Но эта сумма квадратов равна произведению площади H на число частиц. Следовательно, произведение площади H на число частиц, разделенное на произведение отрезка FE на число частиц, дает длину изохронного простого маятника. Или, отбросив общий множитель, имеем — длина секундного маятника получается путем деления площади фигуры H на расстояние FE. Следовательно, FG есть длина изохронного простого маятника, что и требовалось доказать.

Предложение XVIII

Представим себе наш маятник,[113] *разделенным на очень малые равные частицы. Пусть из каждой частицы опущен перпендикуляр на линию, проходящую через центр тяжести параллельно оси колебания; пусть дана плоская фигура, площадь которой, будучи помножена на число частиц, дает сумму квадратов длин указанных перпендикуляров. Тогда величина отрезка, на который центр качаний ниже центра тяжести, получится путем деления площади фигуры на расстояние между осью колебаний* *и линией, проведенной параллельно ей через центр тяжести.*[114]

Пусть (фиг. 85) $ABCD$ — наш маятник; E — его центр тяжести. Ось колебаний проходит через F, перпендикулярно к плоскости чертежа, G — центр качаний.

Далее предположим, что через центр тяжести проложена параллель к оси колебаний. Мысленно разделим маятник на очень малые частицы, равные между собой. Из каждой час-



Фиг. 85.

тицы опускаем перпендикуляр на LY, параллельную оси через F и проходящую через E. Сумма квадратов этих перпендикуляров пусть будет равна произведению площади плоской фигуры I на число частиц. Частное от деления I на расстояние FE дает некоторую прямую. Я утверждаю, что $\frac{I}{FE} = EG$, т. е. равно расстоянию, на которое центр качания лежит ниже центра тяжести.

Для совсем общего доказательства теоремы представим себе рядом с маятником $ABCD$ плоскую фигуру OQP. У этой фигуры, если ее пересечь теми же горизонтальными плоскостями, как и наш маятник, отрезки между двумя такими плоскостями имеют то же отношение друг к другу, как и соответствующие отрезки нашего маятника. Отдельные отрезки фигуры OQP разделим на то же число частиц, как соответственные отрезки нашего маятника $ABCD$. Очевидно, это всегда возможно, каков бы ни был наш маятник, будь он линией, плоскостью или телом. Очевидно также, что центр тяжести T фигуры OQP будет находиться на той же высоте, как и центр тяжести маятника $ABCD$. Если через F проложить горизонтальную плоскость, то она пересечет ось фигуры OQP в точке S, такой, что $ST=FE$.[115]

Как известно, по предложению VI этой части, сумма квадратов перпендикуляров, опущенных из всех частиц маятника на ось колебаний, разделенная на произведение расстояния FE на число частиц, равна длине простого маятника, синхронного с нашим. Эту длину мы назвали FG. Но сумма этих квадратов, очевидно, равна сумме квадратов длин перпендикуляров, опущенных из всех точек маятника на горизонтальную плоскость, проходящую через F, сложенной с суммой квадратов перпендикуляров, опущенных из всех точек маятника на вертикальную плоскость, проходящую через ось колебаний (по теореме 47 I книги Эвклида). Перпендикуляры, опущенные на горизонтальную плоскость, проходящую через F, равны перпендикулярам, опущенным из соответственной точки фигуры OQP на прямую SF. Пусть O — высшая точка фигуры OQP. Проводим через O линию VV, параллельную SF, и вообразим себе клин, построенный над OQP с использованием этой прямой. Пусть OH — субцентрика этого клина. Тогда по теореме IX этой части сумма квадратов длин перпендикуляров, опущенных из всех частиц фигуры OQP на прямую SF, равна произведению из числа частиц на сумму прямоугольника $OT \cdot TH$ и квадрата ST^2. При этом число частиц фигуры OQP то же, что и маятника $ABCD$. Что касается квадратов расстояний отдельных частиц от плоскости FE, то их сумма всегда одна и та же, независимо от расстояния оси F от центра тяжести E. Приравняем эту сумму произведению площади некоторой плоской фигуры Z на число частиц маятника $ABCD$. Таким образом, сумма квадратов длин всех перпендикуляров, опущенных из отдельных частиц маятника $ABCD$ на ось F, равна произведению числа частиц маятника на сумму $OT \cdot TH + ST^2 + Z$. Если разделить эту сумму на отрезок FE или ST, то получается FG — длина простого маятника, изохронного с данным (по теореме VI этой части). Имеем, следовательно,

$$\frac{OT \cdot TH + ST^2 + Z}{FE} = \frac{OT \cdot TH + ST^2 + Z}{ST} = FG,$$

но

$$\frac{ST^2}{ST} = ST = FE.$$

Вычитание дает

$$\frac{OT \cdot TH + Z}{FE} = \frac{TO \cdot TH + Z}{ST} = EG.$$

Остается только доказать, что

$$OT \cdot TH + Z = I.$$

Тогда будет доказано, что

$$\frac{I}{FE} = EG.$$

Доказательство протекает следующим образом. Пролагаем горизонтальную плоскость KK через центр тяжести маятника $ABCD$ и проводим через центр тяжести фигуры OQP линию TX, параллельную линии SF. Произведение прямоугольника $OT \cdot TH$ на число частиц фигуры OQP или маятника $ABCD$ равно сумме квадратов всех перпендикуляров, опущенных из отдельных частиц фигуры OQP на прямую XT (по теореме X этой части), и, следовательно, равно сумме квадратов длин перпендикуляров, опущенных из частиц маятника $ABCD$ на плоскость KK, так как длины перпендикуляров в обоих случаях одинаковы.

Но произведение Z на число частиц маятника равнялось сумме квадратов длин перпендикуляров, опущенных из всех частиц маятника на вертикальную плоскость FE. Также ясно, что сумма квадратов длин перпендикуляров, опущенных на вертикальную плоскость FE, сложенная с суммой квадратов длин перпендикуляров, опущенных на плоскость KK, дает сумму квадратов длин перпендикуляров, опущенных на проходящую через E ось, параллельную оси F (по теореме 47 I книги Эвклида). Следовательно, произведение суммы $OT \cdot HT + Z$ на число частиц маятника $ABCD$ равно сумме квадратов длин перпендикуляров, опущенных из всех частиц маятника на указанную, проведенную через E прямую. Но раньше мы установили, что произведение площади I на то же число частиц равно сумме квадратов тех же перпендикуляров. Следовательно,

$$I = OT \cdot TH + Z,$$

что еще оставалось доказать.

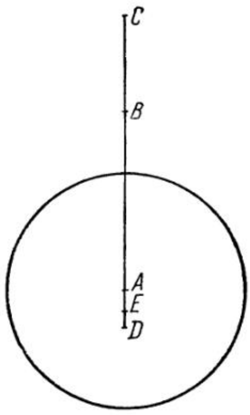
Отсюда снова получается то, что доказано в теореме XVI, а именно, что любой маятник остается изохронным самому себе при качаниях вокруг разных осей, лишь бы эти оси были параллельны друг другу и отстояли от центра тяжести на одно и то же расстояние. В самом деле. Пусть маятник качается около оси F или около параллельной ей оси L. Если проложить через E линию, параллельную обеим осям F и L, то очевидно, что сумма квадратов длин перпендикуляров, опущенных из всех частиц тела на эту прямую, неизменна. Следовательно, и площадь I, которая, будучи умножена на число частиц, дает эту сумму квадратов, так же одна и та же в обоих случаях. Но если разделить эту площадь I на расстояние центра тяжести от оси колебаний, которое также принимается одинаковым в обоих случаях, то получается расстояние от центра тяжести до центра качаний, лежащего ниже центра тяжести. Следовательно, и последнее расстояние в обоих случаях одинаково. Пусть, например, при колебании вокруг оси L это расстояние равно EY, тогда

$$EY = EG.$$

Следовательно, $LY = FG$, и следовательно, при обоих способах подвеса тот же простой маятник будет изохронен маятнику $ABCD$.

Предложение XIX

Если один и тот же маятник подвешивается один раз на более коротком, другой раз на более длинном подвесе, то расстояния центра качаний от центра тяжести обратно пропорциональны расстояниям от центра тяжести до оси колебаний. [116]



Фиг. 86.

Пусть (фиг. 86) A — центр тяжести маятника. Ось колебаний проходит один раз через B, другой раз через C.

Центр качаний находится в первом случае в D, во втором в E. Тогда я утверждаю, что существует пропорция

$$BA : CA = EA : DA.$$

Длина AD, на которую центр качаний ниже центра тяжести, находится путем деления на длину AB площади фигуры, определяемой следующим путем. Площадь фигуры, будучи помножена на число весьма малых частиц, на которые надо мысленно разделить маятник, дает сумму квадратов расстояний от оси A, параллельной оси B (по предыдущей теореме). Отсюда площадь фигуры равна прямоугольнику $BA \cdot AD$. Если ось проходит через C, то мы найдем расстояние AE, разделив площадь той же фигуры на расстояние CA; следовательно, площадь фигуры равна также прямоугольнику $CA \cdot AE$, т. е. оба прямоугольника равновелики.

$$BA \cdot AD = CA \cdot AE$$

и

$$\frac{BA}{CA}=\frac{AE}{AD},$$

что и требовалось доказать.

Отсюда следует и другое. Если для маятника известны положение центра тяжести и длина простого маятника, изохронного с ним при определенной оси колебания, тогда и для любого другого более длинного или короткого подвешивания известна длина изохронного простого маятника, пока плоскость колебаний одна и та же.

Предложение XX

Центр качаний и подвес (ось колебаний) можно поменять местами.

На предыдущей фигуре (фиг. 86) D есть центр качаний, если B есть ось колебаний. Если повернуть соотношение и сделать D осью колебаний, то B станет центром качаний.

Это непосредственно следует из предыдущей теоремы.[117]

Предложение XXI

Как находят центры качаний плоских фигур.

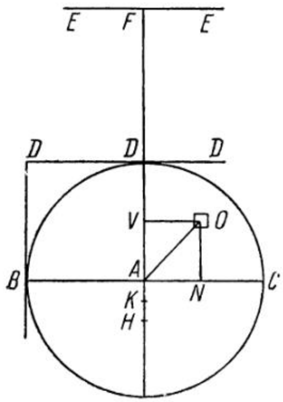
Если усвоено то, что пока доказано, то нетрудно найти положение центра тяжести для большинства фигур, рассматриваемых в геометрии. Мы начнем с плоских фигур. Для них мы определили два вида колебаний. Колебания вокруг оси, лежащей в плоскости фигуры, и колебания вокруг оси, перпендикулярной плоскости фигуры. Первые колебания мы назвали плоскими, вторые — боковыми.

Пусть фигура производит колебания первого вида, т. е. вокруг оси, лежащей в плоскости фигуры. На фиг. 87 и 88 BCD — плоская фигура. Ось вращения EF. Тогда проводят к фигуре касательную DD, параллельную EF, и при помощи нее строят клин. Мы считаем известными расстояние AD от центра тяжести фигуры до касательной и субцентрику DH. Тогда центр качаний маятника BDC найдется при помощи уравнения

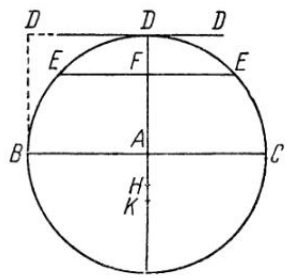
$$AK = \frac{DA \cdot AH}{FA}.$$

Здесь AK отрезок, показывающий, насколько центр качаний лежит ниже центра тяжести.[118]

Этот результат следует из таких соображений. Если провести через центр тяжести A линию BAC, параллельную оси колебания EF, то произведение прямоугольника $DA \cdot AH$



Фиг. 87.



Фиг. 88.

на число частиц фигуры BCD равно сумме квадратов длин перпендикуляров, опущенных из всех частиц маятника на прямую BAC (по предложению X этой части). Следовательно, если разделить прямоугольник $DA \cdot AH$ на длину FA, то по предложению XVIII этой части, получится отрезок AK, показывающий, насколько центр качаний ниже центра тяжести.

Отсюда следует, что при совпадении оси колебаний с DD H становится центром качаний и что в этом случае длина простого маятника, изохронного с BCD, просто равна субцентрику клина, построенного на нашей фигуре с использованием прямой DD как касательной.[119]

Один только этот факт был уже ранее замечен другими, но не был доказан.[120]

Я не хочу здесь разбирать вопрос, как определяется центр тяжести построенного на плоской фигуре клина. Это во многих случаях уже известно. Например, если фигура BCD есть круг, то расстояние DH равно $^5/_8$ поперечника.[121]

Если же фигура есть прямоугольник, то $DH = {}^2/_3$ его длины.[122]

Отсюда одновременно получается, что тяжелая линия, подвешенная за один конец, изохронна простому маятнику, длина которого равна $^2/_3$ длины линии. Надо только рассматривать такую линию как прямоугольник чрезвычайно малой ширины.

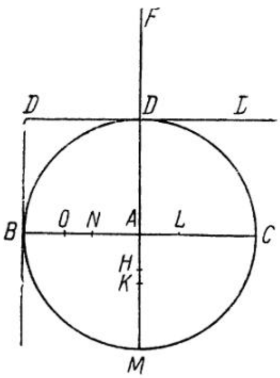
Если фигура — треугольник с вершиной, обращеной вверх, то $DH = {}^3/_4$ высоты; если вершина обращена вниз, DH равно половине высоты.[123]

Следует заметить, что доказанное в теореме XVI относится и к тому виду движения плоской фигуры, который мы теперь рассматриваем. Именно, если давать фигуре BCD (фиг. 87 и 88) разные положения, вращая ее вокруг оси BAC так, что фигура будет расположена то горизонтально, то косо, все-таки длина изохронного простого маятника будет одна и та же, пока ось колебаний FE неизменна. Это сразу видно из теоремы.

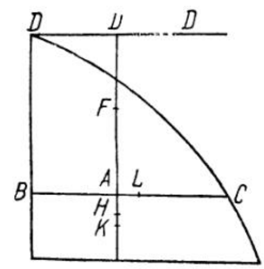
Пусть теперь плоская фигура колеблется вокруг оси, перпендикулярной к ее плоскости, т. е. совершает по нашим обозначениям, боковые колебания. Например, пусть фигура BCD (фиг. 89 и 90) колеблется вокруг оси, проходящей через точку F, перпендикулярно к плоскости рисунка.[124]

В этом случае надо использовать не только клин, который можно построить на плоской фигуре, используя линию DD, касательную в наивысшей точке фигуры, но еще и второй клин, построенный при помощи линии BD, касающейся фигуры сбоку и перпендикулярной к касательной DD.[125]

Необходимо знать кроме центра тяжести A фигуры и субцентрики HD первого клина, еще субцентрики BL второго клина. Тогда будут известны и прямоугольники $DA \cdot AH$ и $BA \cdot AL$, сумма которых дает площадь, которую мы впредь будем также называть прямоугольником колебаний. Этот прямоугольник, будучи поделен на длину AF, дает AK —



Фиг. 89.



Фиг. 90.

отрезок, показывающий насколько центр качаний K лежит ниже центра тяжести

$$AK = \frac{DA \cdot AH + BA \cdot AL}{FA}.$$

Если FA — геометрическая ось фигуры, то можно вместо клина, построенного на всей фигуре с использованием касательной BD, построить клин на половине фигуры с использованием прямой DM. Если OA — субцентрика этого клина, NA — расстояние центра тяжести фигуры DBM от прямой DM, то

$$OA \cdot AN = BA \cdot AL$$

(по предложению XI этой части). Тогда мы можем написать

$$AK = \frac{OA \cdot AN + DA \cdot AH}{FA}.$$

Доказательство этого вытекает из предыдущего. Сумма прямоугольников

$$DA \cdot AH + BA \cdot AL$$

или

$$DA \cdot AH + OA \cdot AN,$$

помноженная на число частей фигуры, равна сумме квадратов расстояний отдельных частей от центра тяжести или, что то же самое, от параллели к оси колебаний, проведенной через центр тяжести. Следовательно, эта сумма, поделенная на FA, дает длину AK (по предложению XVIII этой части).

Центр качаний круга

У круга (фиг. 89), очевидно,

$$DA \cdot AH = BA \cdot AL$$

и

$$DA \cdot AH + BA \cdot AL = \frac{r^2}{2},$$

если r — радиус круга.[126]

Поэтому, если построить отрезок x так, чтобы

$$FA : r = r : x,$$

то

$$AK = \frac{x}{2}.$$

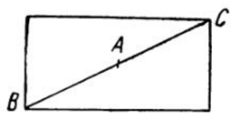
Таким образом получается расстояние от центра тяжести до центра качания. Если круг вращается вокруг оси, лежащей на окружности, то

$$DK = \frac{3}{4} DM.$$

Таким же образом я искал центров качаний и следующих плоских фигур. Достаточно будет сообщить результаты.

Центр качаний прямоугольника

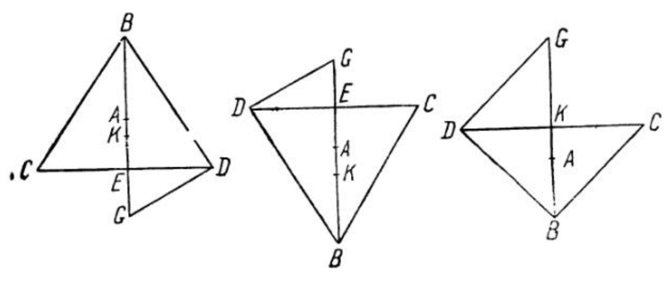
В каждом прямоугольнике BC (фиг. 91) прямоугольник качаний (выражение, подлежащее делению) равен $\frac{1}{3} AC^2$, где AC — половина диагонали прямоугольника. Если подвесить прямоугольник в одном из его углов и если он колеблется в своей плоскости, то он изохронен простому маятнику, длина которого $= \frac{2}{3}$ диагонали.[127]



Фиг. 91.

Центр качаний равнобедренного треугольника

В равнобедренном треугольнике CBD (фиг. 92) площадь, подлежащая делению на длину, т. е. прямоугольник колебаний, есть $\frac{1}{18} BE^2 + \frac{1}{24} CD^2$, если BE — высота, а CD — основание равнобедренного треугольника.[128]



Фиг. 92.

Пусть A — центр тяжести треугольника. Строят на одном конце основания D перпендикуляр к стороне BD, который пересекает продолжение высоты в точке G. Затем делят AG на четыре равные части; если AK — первая из них, то $BA + AK = BK$ — длина простого маятника, изохронного нашему маятнику, если треугольник подвешен в своей вершине.[129]

Если же подвесить треугольник в середине основания E, то длина EK изохронного простого маятника $= \frac{1}{2}\ BG$.[130]

Отсюда следует, что для прямоугольного равнобедренного треугольника, подвешенного в середине основания, длина изохронного простого маятника равна высоте треугольника. Если его подвесить за вершину прямого угла, то маятник будет изохронен тому же простому маятнику.[131]

Центр качаний параболы

У прямого[132] сегмента параболы, ограниченного прямой, перпендикулярной к оси, площадь, подлежащая делению, равна $\frac{12}{175}a^2 + \frac{1}{5}b^2$, где a — отрезок оси и b — половина основания.[133]

Если подвесить параболический сегмент в вершине, то длина изохронного простого маятника равна $\frac{5}{7}\ a + \frac{2}{3}\ p$, где $2\ p$ — параметр. Если же подвесить параболический сегмент в середине основания, то длина простого маятника будет $\frac{4}{7}\ a + p$.[134]

Центр качаний кругового сектора

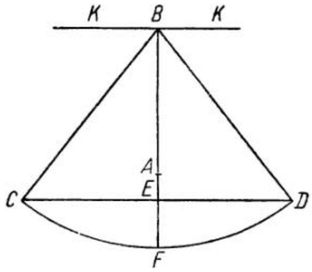
Пусть у кругового сектора BCD (фиг. 93) радиус BC равен r, половина дуги CF равна p, половина хорды $CE = b$, тогда выражение, подлежащее делению, равно

$$\frac{1}{2}\ r^2 - \frac{4b^2r^2}{9p^2}\text{, т. е. } \frac{1}{2}\ BC^2 - BA^2.$$

Здесь A — центр тяжести сегмента, тогда

$$BA = \frac{2br}{3p}\,.$$

Если сектор подвесить в центре его круга B, то длина изохронного ему простого маятника равна $\frac{3pr}{4b}$, т. е. $\frac{3}{4}$ длины того отрезка, который так относится к радиусу круга, как дуга CFD к хорде CD. Это выражение можно найти, вычислив в соответственных клиньях субцентрики. Если построить клин на всем секторе, воспользовавшись прямой KK, параллельной хорде CD, то получится субцентрика



Фиг. 93.

$$\frac{3}{8}r - \frac{3}{8}a + \frac{3pr}{8b},$$

где $a = EF$. Если построить клин над половиной сектора BFC, воспользовавшись прямой BF, то получается субцентрика

$$\frac{3b}{8} - \frac{3br}{8a} + \frac{3pr}{8a}.$$

Можно, однако, легче найти центр качаний сектора другим способом, именно следующим образом. Пусть (фиг. 94) BCP чрезвычайно малый частичный сектор сектора BCD, так, что его можно рассматривать как треугольник.[135]

Разделим частичный сектор пополам радиусом BR и построим в B перпендикуляр BQ к этому радиусу. Тогда сумма квадратов расстояний частей частичного сектора от точки B равняется сумме квадратов расстояний тех же частиц от BR, сложенной с суммой квадратов расстояний частиц от прямой BQ. Но отношение последней суммы к предыдущей больше всякой величины, так как угол CBP очень мал. Следовательно, суммой квадратов расстояния от BR можно пренебречь по сравнению с квадратами расстояний от BQ.

Если положить $BO = \frac{2}{3}\ BR$, т. е. если O — центр тяжести частичного сектора и если $BN = \frac{3}{4}\ BR$, т. е. если N есть субцентрика клина, построенного на треугольнике BCP с использованием прямой BQ, то сумма квадратов расстояний частей треугольника BCP от прямой BQ равна площади прямоугольника $BO \cdot BN$, помноженной на число частиц треугольника. Это же произведение равно сумме квадратов расстояний частиц треугольника BCD от точки B.[136] Эта сумма относится к сумме, рассчитанной на весь сектор BCD, как число частиц сектора BCP к числу частиц сектора BCD; это легко понять, так как весь сектор представляется разделенным на одинаковые частичные секторы BCP. Следовательно, произведение площади прямоугольника $BN \cdot BO$ на число частиц всего сектора BCD равно сумме квадратов расстояний всех частиц от точки B. Поэтому прямоугольник $BN \cdot BO$, разделенный на BA, расстояние точки подвеса от центра тяжести сектора даст длину изохронного простого маятника (по предложению XVII этой части).

Но мы имеем

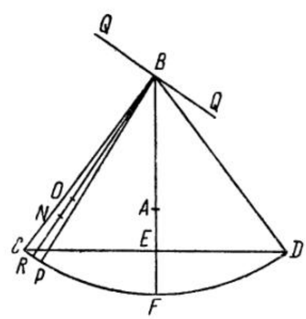
$$BN \cdot BO = \frac{1}{2} r^2$$

и, как показано выше,

$$BA = \frac{2br}{3p}.$$

Следовательно,

$$\frac{BN \cdot BO}{BA} = \frac{3pr}{4b}.$$

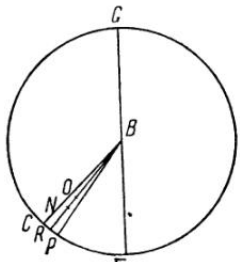


Фиг. 94.

Таким образом, мы получаем для длины изохронного простого маятника то же выражение, что и раньше.

Центр качаний круга другим способом, чем раньше

Таким же способом можно очень легко получить центр качаний круга. Пусть (фиг. 95) GCF — круг, B — его центр. Рассмотрим у него крайне малый сектор BCP, как мы это раньше делали для сектора BCD. Согласно нашему выводу, сумма квадратов расстояний всех частичек, составляющих частичный сектор BCP, от центра B равно произведению из площади прямоугольника $BN \cdot BO$, равной $\frac{1}{2} r^2$, на число частичек частичного сектора. Так как весь круг составлен из таких секторов BCP, то сумма квадратов расстояний частичек, составляющих круг, от центра равна $\frac{1}{2} r^2$, помноженному на число частичек в круге.

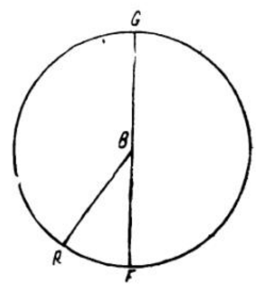


Фиг. 95.

Но B есть центр тяжести круга. Значит, чтобы получить отрезок, на который центр качания ниже центра тяжести, надо $\frac{1}{2} r^2$ разделить на расстояние между точкой подвеса и центром круга B (по предложению XVIII этой части). Это мы уже нашли выше другим способом.

Центр качаний окружности

Еще легче находится по этому методу центр качаний окружности. Пусть (фиг. 96) около центра B описан круг радиусом BR. Тогда сумма квадратов расстояний частиц окружности от центра равна произведению BR^2 на число равных частиц, на которые мысленно поделена окружность. Следовательно, BR^2 есть выражение, которое надо делить на прямую (согласно теореме XXIII этой части). Если окружность подвешена в G, в одной из точек окружности, то изохронный простой маятник имеет длину, равную диаметру GF[137]



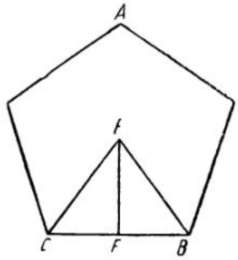
Фиг. 96.

Центр качаний правильных многоугольников

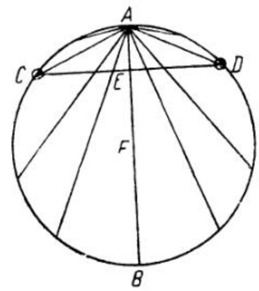
Подобным же образом находят длину изохронного простого маятника, соответствующего любому правильному многоугольнику, например ABC (фиг. 97). Если s — сторона многоугольника и h — перпендикуляр, опущенный из центра многоугольника на сторону, то выражение, подлежащее делению на длину, будет иметь вид $\frac{1}{2}h^2+\frac{1}{24}s^2$.[138]

Если ищется длина простого маятника, изохронного с маятником, состоящим из периметра многоугольника, то выражение, подлежащее делению на длину, есть

$$h^2+\frac{1}{12}s^2.$$[139]



Фиг. 97.



Фиг. 98.

Построения[140] в этой теории

Не безынтересно далее рассмотрение геометрических мест в этих вопросах. Пусть (фиг. 98) дана точка подвеса A и длина AB. Надо определить положения двух равных грузов C и D, такие, чтобы они одинаково отстояли от A и также от отвесной линии AB и, при колебании вокруг проходящей через A оси, перпендикулярной плоскости ACD, колебались бы изохронно простому маятнику длины AB. Положим $AB=a$ и соединим C и D прямой, которая пересечет AB в E под прямым углом. Пусть неизвестная длина $AE=x$; EC или $ED=y$.

Тогда

$$AC^2=x^2+y^2.$$

Но произведение из AC^2 на число частей, составляющих грузы C и D, равно сумме квадратов расстояний этих частей, от оси A. Так как расстояние от точки подвеса до центра тяжести грузов $= AE$, то длина изохронного простого маятника равна

$$\frac{AC^2}{AE} = \frac{x^2 + y^2}{x}$$

(по предложению XVII).

Эта длина должна равняться a

$$\frac{x^2 + y^2}{x} = a,$$

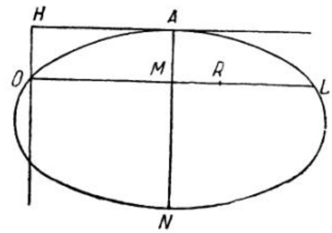
$$y^2 = ax - x^2.$$

Отсюда видно, что геометрическим местом точек C и D будет окружность круга радиуса $\frac{a}{2}$ или FA, проведенного вокруг точки, являющейся серединой линии AB. В каком бы месте окружности $ACBD$ ни находились два равных груза, равноотстоящих от A, маятник всегда будет изохронен простому маятнику длины AB. Отсюда ясно следует, что и вся окружность $ACBD$, если ее предположить имеющей вес, или часть окружности, симметричная относительно A или B при оси колебаний, проходящей через A, будет изохронна простому маятнику длины AB.

Дадим теперь пример геометрического места в пространстве.

Дана твердая невесомая линия AN (фиг. 99). В некоторой точке ее M к ней прикрепляется под прямым углом тяжелый стержень (или линия) OML, который делится пополам в точке M, при этом требуется, чтобы стержень, колеблясь около A, совершал колебания в своей плоскости, изохронные колебаниям простого маятника длины AN. Проводим через O линию, параллельную AN, и через A линию, параллельную OL, они пересекаются в H. Откладываем вдоль OL длину $OR = \frac{2}{3} OL$. Тогда OR — субцентрика клина, построенного на длине OL с использованием прямой OH, и AM — субцентрика другого клина, построенного на OL с использованием прямой AH. (Этот клин не что иное, как прямоугольник).[141]

Поэтому тот прямоугольник, который был выше назван прямоугольником колебаний, будет просто равен $OM \cdot MR$. И следовательно, это выражение, разделенное на AM, дает длину, на которую центр качаний ниже центра тяжести, т. е. ниже M.[142]



Фиг. 99.

Положим $AN = a$; $AM = x$; MO или $ML = y$. Прямоугольник

$$OM \cdot MR = \frac{1}{3} y^2 \cdot$$

После деления на AM получается $\frac{y^2}{3x}$.

Эта величина равна MN, так как центр качаний маятника должен лежать в N. Мы получаем уравнение

$$\frac{y^2}{3x} + x = a,$$

$$y = \sqrt{3ax - 3x^2}.$$

Это равенство показывает, что точки O и L лежат на эллипсе, малая ось которого равна AN, а большая $AN\sqrt{3}$.

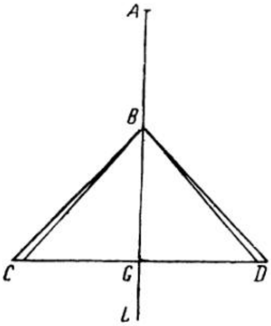
Так как каждый стержень, параллельный OL, концы которого лежат на нашем эллипсе, производит колебания, изохронные колебаниям простого маятника длины AN, то и вся плоскость эллипса, подвешенная в A и колеблющаяся в своей плоскости, будет изохронна простому маятнику AN. Также и любая часть эллипса, ограниченная одной или двумя прямыми, перпендикулярными AN.

Приведу еще пример плоского геометрического места, в котором обнаруживается немало вещей, достойных внимания. Пусть (фиг. 100) AB — невесомый стержень, подвешенный в A, на нем дана точка B. Требуется прикрепить в B два одинаковых треугольника, отклоненных на равные углы от оси, угол треугольников при B чрезвычайно или бесконечно мал. Они должны быть прикреплены так, чтобы, будучи подвешены в A, совершали бы колебания, изохронные простому маятнику длины AL. Опустим из C перпендикуляр CG на AB и положим

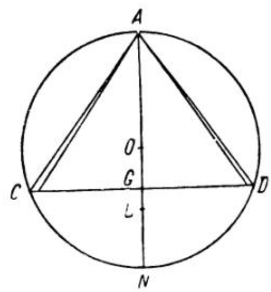
$$AB=a;\ AL=b;\ BG=x;\ CG=y.$$

Тогда мы придем к уравнению:[143]

$$y=\sqrt{2ab-2a^2-\frac{8}{3}ax+\frac{4}{3}bx-x^2}.$$



Фиг. 100.



Фиг. 101.

Это уравнение показывает, что основания треугольников C и D, которые здесь можно рассматривать как точки, лежат на окружности круга, так как в правой части уравнения стоит простой член $-x^2$ с коэффициентом единица.

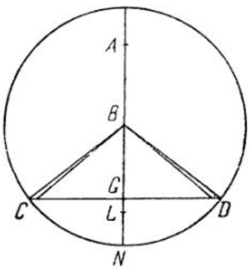
Если $a=0$, т. е. если точка прикрепления треугольников B совпадает с A, то уравнение принимает вид

$$y=\sqrt{\frac{4}{3}bx-x^2}.$$

Сделаем (фиг. 101) $AO=\frac{2}{3}b$, т. е. $\frac{2}{3}AL$, и опишем около O круг радиусом OA, тогда основания треугольников

AC и CD будут лежать на этом круге. Каждая пара очень узких треугольников, простирающихся от A до окружности $ACND$, равных друг другу и симметрично относительно оси AN расположенных, имеет свой центр качаний в точке L, причем $AL = \frac{3}{4} AN$.

Так как весь круг состоит из таких пар и то же имеет место для любой части круга, например $ACND$, имеющей равные стороны AC и AD, то и весь круг и подобные части его будут иметь центр качаний в L.



Фиг. 102.

Если же положить в полученном уравнении $\frac{8}{3} a = \frac{4}{3} b$ или $2a = b$, т. е. если предположить, что треугольники подвешены в точке B, которая делит AL пополам (фиг. 102), то уравнение принимает вид

$$y = \sqrt{2a^2 - x^2}.$$

Из этого уравнения следует, что круг, проведенный вокруг B как центра радиусом, равным $BA\sqrt{2}$, является геометрическим местом узких оснований треугольников BC и BD, которые, будучи подвешены в A, имеют свой центр качаний в L. И так как весь круг составлен из таких пар треугольников, так же как и любой сектор, симметричный относительно оси AN, то, очевидно, и эти фигуры, будучи подвешены в A, имеют центры колебаний в L. Следовательно, если любой круговой сектор подвешен в точке, отстоящей от центра окружности на половину величины стороны квадрата, вписанного в этот круг, тогда длина изохронного с ним простого маятника равна стороне вписанного квадрата.

Таким образом, только в этом случае длина простого маятника, изохронного с данным сектором, не зависит от величины дуги сектора.[144]

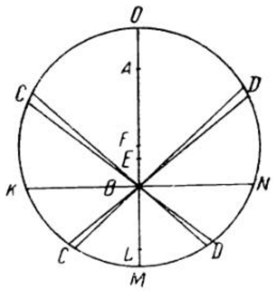
В общем случае для построения первоначального уравнения

$$y=\sqrt{2ab-2a^2-\frac{8}{3}ax+\frac{4}{3}bx-x^2}.$$

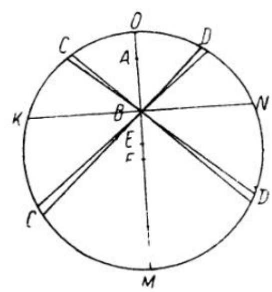
поступают так (фиг. 103 и 104). Делят AL пополам в точке E. Продолжают BE на $EF=\frac{1}{3}BE$. Тогда F — центр описываемой окружности, а для радиуса FO получается выражение [145]

$$FO=\sqrt{2[(AE)^2-(EF)^2]}.$$

Если начертить от B до пересечения с окружностью два одинаковых узких треугольника, например BC и BD, то



Фиг. 103.



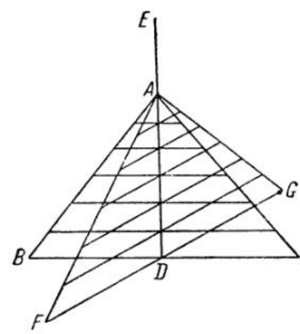
Фиг. 104.

они, будучи подвешены в A, будут иметь своим центром качания L. Если поэтому при каком-нибудь вырезе из круга B — вершина и прямая AL — ось симметрии, как, например, у выреза BCD, то и этот вырез будет иметь центром качания точку L, если он подвешен в A. То же относится к круговым сегментам KON и KMN, которые получаются, если восстановить в B перпендикуляр к OM.

Этим мы удовольствуемся при разборе колебаний плоских линий и фигур в своей плоскости. Прибавим к этому еще только следующее.

Мы пока находили центр качания прямых фигур, т. е. фигур, имеющих ось симметрии, как, например, равнобедренный треугольник и прямой параболический сегмент. Я хочу показать теперь, как может быть определен центр качаний у косых фигур, возникающих как бы из искажения „прямых", например у косоугольного треугольника или у косого параболического сегмента.

Представим себе, например (фиг. 105), равнобедренный треугольник ABC, высота которого AD, подвешенным в точке E, и еще другой, косой треугольник FAG, ось которого также AD и основание которого FG равно основанию BC, тогда я утверждаю, что этот треугольник, будучи подвешен в E, изохронен с первым.



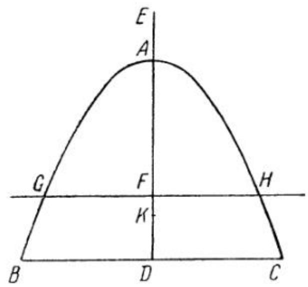
Фиг. 105.

Именно стержень, или тяжелая линия FG, подвешенная в D в косом положении на невесомой нити ED, изохронна со стержнем (или тяжелой линией) BC, также подвешенной в D (по предложению XVI этой части), и тоже относится ко всем другим стержням или тяжелым линиям обоих треугольников, пересекающих ED в тех же точках и имеющих одинаковую длину. А тогда обязательно изохронны и оба треугольника, которые можно представить себе состоящими из этих линий или стержней. У других фигур доказательство идет подобным же образом.

Предложение XXII

Как находят центр качания тел.

После всего сказанного легко находится и центр качания твердых тел. Пусть (фиг. 106) ABC представляет твердое тело, висящее на оси, которая проходит через E перпендикулярно плоскости рисунка. Центр тяжести тела находится в F. Пролагают через F горизонтальную плоскость GFH и через F и ось вертикальную плоскость EFD.

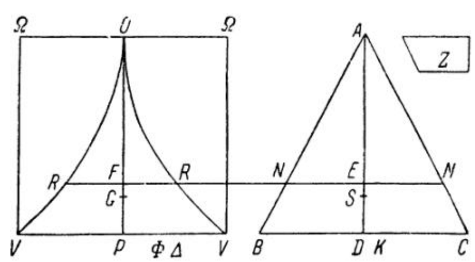


Фиг. 106.

По теореме XIV находим сумму квадратов расстояний отдельных частей тела ABC от плоскости GFH и также от плоскости EFD, т. е. находим оба прямоугольника, которые, будучи помноженными на число частей тела, равны указанным суммам квадратов. Если разделить сумму обоих прямоугольников на расстояние EF, то получается отрезок FK, на который центр качания лежит ниже центра тяжести. Это вытекает из теоремы XVIII. Приведем несколько примеров и на это правило.

Центр качания пирамиды

Рассмотрим сначала (фиг. 107) пирамиду ABC с вершиной в A и с квадратным основанием. Сторона квадрата равна BC. Пирамида колеблется вокруг оси, проходящей через A перпендикулярно плоскости рисунка.



Фиг. 107.

В этом случае пропорциональная фигура, которую надо построить рядом с телом A, согласно теореме XIV, будет состоять из параболических остатков OPV, т. е. из того, что останется от прямоугольников ΩP после отнятия параболических сегментов $OV\Omega$, имеющих общую вершину в O.[146]

Действительно, хорды VV, RR плоской фигуры будут относиться друг к другу, как сечения пирамиды BC, NN. Точно так же, как у пирамиды центр тяжести E лежит на расстоянии $\frac{3}{4}AD$ от вершины пирамиды, так и у фигуры OVV центр тяжести F отстоит на $\frac{3}{4}OP$ от O.

Предположим, что через центр тяжести E пирамиды проведена горизонтальная плоскость, которая пересечет фигуру OVV по линии RF, и над фигурой OVV построен клин с использованием прямой $O\Omega$, субцентрика клина пусть будет OG. Длина субцентрика $OG=\frac{4}{5}OP$.[147]

Произведение прямоугольника $OF \cdot FG$ на число частей фигуры OVV равно сумме квадратов расстояний частей от прямой RF (по предложению X этой части), а следовательно, равно также сумме квадратов расстояний частей тела ABC от площади NE. Мы имеем[148]

$$OF \cdot FG=\frac{3}{80}OP^2=\frac{3}{80}AD^2.$$

Для нахождения суммы квадратов расстояний от плоскости AD надо прежде всего определить субцентрику клина, построенного на основании пирамиды, т. е. на квадрате со стороной BC с использованием линии параллельной оси A и проходящей через B. Назовем субцентрику BK.[149]

$$BK=\frac{2}{3}BC.$$

Необходимо также определить расстояние центра тяжести половины фигуры OPV от OP, назовем это расстояние ΦP.[150]

$$\Phi P=\frac{3}{10}PV.$$

Затем надо построить фигуру Z, такую, чтобы она относилась к прямоугольнику $BD \cdot DK$, равному $\frac{1}{12}BC^2$, как $P\Phi$ к ΔP, т. е. как $3:5$.[151]

Фигура Z, помноженная на число частей тела ABC, будет равна сумме квадратов расстояний от плоскости AD (по предложению XV этой части).

Очевидно, фигура Z равна $\frac{1}{20}B^2$, поэтому вся площадь, подлежащая делению, равна

$$\frac{3}{80}AD^2+\frac{1}{20}BC^2.$$

Если, как в нашем случае, пирамида подвешена за вершину и, если, следовательно, делить надо на AE, где

$$AE=\frac{3}{4}AD,$$

то мы можем вычислить расстояние ES, на которое центр качания ниже центра тяжести

$$ES=\frac{1}{20}AD+\frac{1}{15}\frac{BG^2}{AD},$$

для всего расстояния AS получается

$$AS=\frac{4}{5}AD+\frac{1}{15}\frac{BC^2}{AD}.$$

Центр качания конуса

Если ABC конус, то вывод остается тем же, только в этом случае, по предложению XV этой части, фигура Z становится равной прямоугольнику $\Delta P \cdot P\Phi$, т. е. $\frac{3}{20}PV^2$ или $\frac{3}{20}BD^2$, или $\frac{3}{80}BC^2$.[152]

Поэтому вся площадь, подлежащая делению на длину, в случае конуса равна

$$\frac{3}{80}AD^2+\frac{3}{80}BC^2.$$

Если конус подвешен в вершине, то расстояние ES, на которое центр качания лежит ниже центра тяжести, равно

$$ES=\frac{1}{20}DA+\frac{1}{20}\frac{BC^2}{AD}$$

и все расстояние AS

$$AS = \frac{4}{5} AD + \frac{1}{20} \frac{BC^2}{AD}.$$

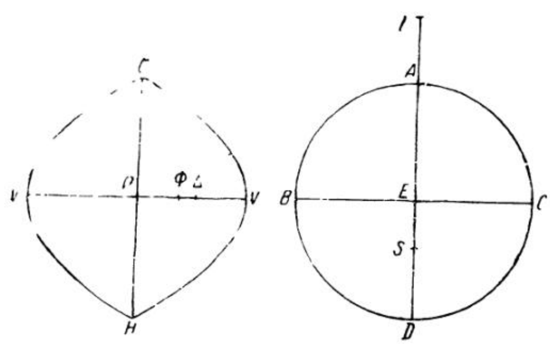
Если $AD = DB$, т. е. если конус прямоугольный, то, очевидно,

$$AS = AD.$$

Из предложения X следует, что, в случае прямоугольного конуса, конус, подвешенный в средине основания, будет изохронен тому же простому маятнику, как и будучи подвешен в вершине, так же как мы показали это выше для прямоугольного треугольника.

Центр качания шара

Пусть (фиг. 108) ABC — шар, тогда пропорциональная фигура OVH, которую надо поместить рядом с шаром, со-



Фиг. 108.

стоит из двух парабол, общее основание которых OH равно диаметру шара.[153]

Прокладываем через центр шара E горизонтальную плоскость BEC и вертикальную плоскость AED. Для нахождения суммы квадратов расстояний частичек от плоскости AD

надо определить расстояние ΦP, на которое центр тяжести половины фигуры $VOVH$ или фигуры $OPHV$ отстоит от P.[154]

$$\Phi P = \frac{2}{5} VP.$$

Разделим PV пополам в Δ. Тогда произведение из прямоугольника $\Delta P \cdot P\Phi$, помноженного на число частей шара ABC, равно сумме квадратов расстояний частей от плоскости AD (по предложению XV). Но прямоугольник $\Delta P \cdot P\Phi$ равен

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} PV^2 = \frac{1}{5} PV^2 = \frac{1}{5} BE^2.$$

В данном случае, очевидно, сумма квадратов расстояний частей от плоскости E равна сумме квадратов расстояний от плоскости AD и, следовательно, равна произведению $\Delta P \cdot P\Phi$ на число частей шара. Следовательно, для шара ABC площадь, подлежащая делению, равна

$$2\Delta P \cdot P\Phi = \frac{2}{5} BE^2 = \frac{2}{5} r^2.$$

Следовательно, если шар подвешен в какой-либо точке A своей поверхности, то расстояние ES от центра шара до центра качания равно $\frac{2}{5} r$. И все расстояние AS равно $\frac{7}{10} d$, где d — диаметр шара. Если же шар подвешен в какой-либо другой точке, например L, то

$$ES = \frac{2}{5} \frac{r^2}{LE}.$$

Центр качания цилиндра

У цилиндра площадь, подлежащая делению на длину, равна, как мы нашли,

$$\frac{1}{12} h^2 + \frac{1}{4} r^2,$$

где h — высота цилиндра и r — радиус основания.

Если подвесить цилиндр в середине его основания, то длина изохронного простого маятника[155]

$$l = \frac{2}{3} h + \frac{1}{2} \frac{r^2}{h}.$$

Центр качания параболического коноида

У параболического коноида прямоугольник качания (см. стр. 168) равен

$$\frac{1}{18} h^2 + \frac{1}{6} r^2,$$

где опять h — высота параболоида, r — радиус основного круга.

Если подвесить параболический коноид в его вершине, то длина простого маятника, изохронного с параболоидом, равна

$$\frac{3}{4} h + \frac{1}{4} \frac{r^2}{h} = \frac{3}{4} h + \frac{1}{2} p,$$

если $2p$ — параметр образующей параболы.[156]

Центр качания гиперболического коноида

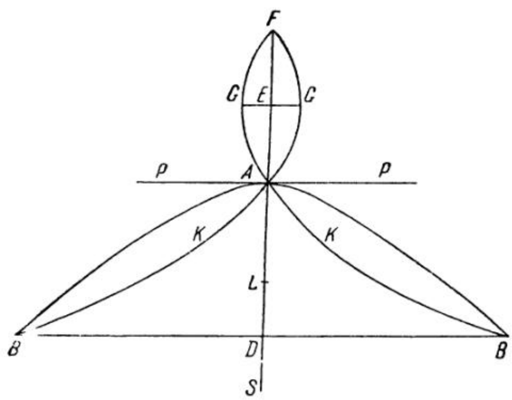
Можно определить также центр качания у гиперболического коноида.[157]

Пусть (фиг. 109) гипербола BAB представляет осевое сечение гиперболического коноида, AD — ось, AF — главная ось гиперболы. Тогда соответствующая пропорциональная фигура есть $BKAKB$. Она имеет основание BB и заключена между двумя одинаковыми ветвями парабол AKB. Парабола BA проходит через вершину гиперболы и имеет ось EG, которая делит главную ось AF гиперболы пополам и параллельна основанию BB.[158]

Центр тяжести L фигуры $BKAKB$ будет настолько же удален от вершины A, как и центр тяжести гиперболоида, и AL определяется из пропорции:[159]

$$\frac{AL}{AD} = \frac{2FA + \frac{3}{2} AD}{3FA + 2AD}.$$

Затем можно определить, насколько центр тяжести половины $ADBK$ фигуры отстоит от A и найти субцентрику клина, построенного над фигурой $BKAKB$ с использованием прямой AP, проходящей через A и параллельной BB. Таким образом, можно в конце концов найти центр качания гиперболического коноида для любого подвешивания, нужно только,



Фиг. 109.

чтобы ось колебания была бы параллельна основанию гиперболического коноида. Я нашел, что для случая, когда высота AD равна главной оси гиперболы AF, площадь, подлежащая делению на прямую, равна [160]

$$\frac{1}{20}AD^2 + \frac{31}{200}DB^2.$$

В этом случае

$$AL = \frac{7}{10}AD.$$

Если подвесить такой гиперболоид в вершине, то длина изохронного простого маятника будет

$$l = \frac{27}{35}AD + \frac{31}{140}\frac{DB^2}{AD}.$$

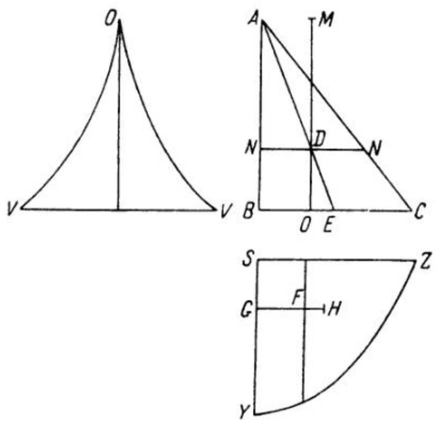
Центр качания половины конуса

Наконец, возможно определить центры качаний некоторых половинных тел, возникающих при сечении через ось тела.

Пусть (фиг. 110) ABC — половина конуса с вершиной A, полукруг, являющийся основанием, имеет радиус BC. Положение его центра тяжести известно, так как

$$AD = \frac{3}{4} AE,$$

если E делит BC таким образом, что $^2/_3\, BC$ так относятся к BE, как $^1/_4$ часть окружности к радиусу. В таком случае E является центром тяжести полукруга, образующего основание;[161] таким образом, на AE лежат центры тяжести всех слоев, параллельных основанию, на которые можно мысленно разбить полуконус.



Фиг. 110

Начерченная рядом пропорциональная фигура OVV была описана выше для целого конуса. При помощи ее находят сумму квадратов расстояний частей полуконуса от горизонтальной плоскости ND, проходящей через центр тяжести D. Для того чтобы найти сумму квадратов расстояний от вертикальной плоскости MDO, в нашем случае надо нарисовать пропорциональную фигуру SYZ так, как учит предложение XIV, т. е. так, чтобы вертикальные сечения давали бы хорды, пропорциональные соответственным сечениям полуконуса ABC. Потом надо установить расстояние, на которое центр тяжести F этой фигуры отстоит от SY;

это расстояние, очевидно, равно расстоянию ND, на которое центр тяжести полуконуса отстоит от плоскости треугольника AB.

Если HG — субцентрика клина, построенного на SZY с использованием прямой SY, тогда произведение $GF \cdot FH$, умноженное на число частей полуконуса, равно сумме квадратов расстояний частей от плоскости MDO. Определение прямоугольника $GF \cdot FH$ возможно и тогда, когда мы не знаем субцентрики HG, а именно следующим образом.

Выше, при рассмотрении конуса, мы сказали, что сумма квадратов расстояний частей от плоскости, проходящей через его ось, равна произведению $\frac{3}{20}r^2$ на число частей всего конуса.

Отсюда следует, что и у полуконуса ABC сумма квадратов расстояний частей от плоскости AB будет равна произведению $\frac{3}{20}BC^2$ на число частей полуконуса. С другой стороны, произедение $HG \cdot GF$ на число частей полуконуса также равно сумме квадратов расстояний частей от плоскости AB, как следует из предложения IX.

Следовательно, прямоугольник

$$HG \cdot GF = \frac{3}{20}BC^2.$$

Положим: $AB = a$; $BC = b$; $^1/_4$ окружности, проведенной радиусом BC, равной q; тогда

$$EB = \frac{2b^2}{3q}.$$

Так как $ND = \frac{3}{4}EB$, то $ND = \frac{b^2}{2q} = GF$.

Вычитая квадрат этого выражения из прямоугольника $GF \cdot GH$, получаем:

$$GF \cdot FH = GF \cdot GH - ND^2 = \frac{3}{20}b^2 - \frac{b^4}{4q^2}.$$

Но произведение этого прямоугольника на число частей полуконуса ABC равно сумме квадратов расстояний частей от MDO. С другой стороны, сумма квадратов расстояний частей от плоскости ND равна, как и для конуса, произведению $\frac{3}{80}AB^2$, или $\frac{3}{80}a^2$, на число частей полуконуса ABC. Таким образом, вся площадь, которую надо делить на длину, в данном случае равна

$$\frac{3}{80}a^2+\frac{3}{20}b^2-\frac{1}{4}\frac{b^4}{q^2}$$

Из этого можно вычислить центр качания при любом подвесе полуконуса, только необходимо, чтобы ось качания была параллельна основанию треугольника AB, являющегося сечением полуконуса. Следует отметить, что можно определить субцентрику клина, построенного над SZY с использованием прямой SY, совсем не зная фигуры SZY. Именно, из того обстоятельства, что прямоугольник $HG\cdot GF$ оказался равным $\frac{3}{20}b^2$ или $\frac{3}{20}BC^2$, а GF — равным $\frac{b^2}{2q}$, следует

$$GH=\frac{3}{10}q.$$

Равным образом можно определить центр качания полуцилиндра, полупараболоида и других полутел, но я предоставляю эти определения другим.

Относительно твердых тел можно повторить то, что было сказано относительно центров качания „косых“ плоских фигур, как бы возникших путем искажения прямых фигур. Они имеют тот же центр качания, как и прямые фигуры.

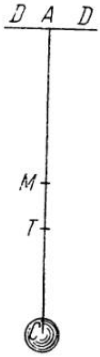
Пусть (фиг. 105) ABC и AFG — два конуса: один прямой, другой косой. Высоты и площади оснований у них одинаковые.

Тогда они изохронны между собой, если они подвешены за вершины или за точки, равноотстоящие от центра тяжести. Только у косого конуса ось колебаний должна быть перпендикулярна плоскости, проложенной через высоту порпендикулярно к основанию.[162]

Предложение XXIII

Как отрегулировать ход часов, прикрепив к ним второй небольшой груз, который можно передвигать вверх и вниз на стержне маятника, снабженном особыми делениями.

Прежде всего нам надо найти центр качания самого маятника, состоящего из весомого стержня и прикрепленного к нижнему концу его груза.



Фиг. 111.

Пусть (фиг. 111) AC — стержень с подвешенным грузом. Длина стержня a. Мысленно разделим стержень и подвешенный груз C на чрезвычайно малые частички и пусть стержень состоит из b частичек, а груз из c частичек, причем, конечно, b относится к c, как вес стержня к весу груза. Длина изохронного простого маятника получится, если разделить сумму квадратов расстояний частичек от A на сумму самих этих расстояний (по теореме VI этой части, в конце). Разделим AC в M пополам и возьмем $AT = 2TC$. Тогда M есть центр тяжести стержня и AT — субцентрика клина, построенного на AC с использованием прямой AD, перпендикулярной к AC. Этот клин на самом деле треугольник. Таким образом, сумма квадратов расстояний частиц стержня от A равна произведению числа частиц b и суммы $AM \cdot MT + AM^2$, т. е.

$$b \cdot AM \cdot AT = \frac{1}{3} a^2 b,$$

так как

$$AM = \frac{1}{2} a, \quad AT = \frac{2}{3} a.$$

Сумма квадратов расстояний частичек груза C от точки A равна произведению числа частичек на квадрат AC (т. е. a^2c).

Таким образом, сумма квадратов расстояний всех частичек стержня и груза равна

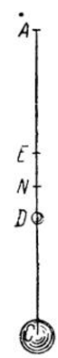
$$\frac{1}{3}a^2b+a^2c.$$

Далее сумма расстояний частиц стержня AC от A равна $\frac{1}{2}ba$, т. е. равна длине стержня a, помноженной на половину числа частичек $\frac{b}{2}$, а сумма расстояний частичек груза от A равна ac. Таким образом, сумма расстояний всех частичек равна $\frac{1}{2}ab+ac$. Разделив сумму квадратов расстояний $\frac{1}{3}a^2b+a^2c$ на $\left(\frac{1}{2}ab+ac\right)$, получим длину изохронного простого маятника

$$l=\frac{\frac{1}{3}a^2b+a^2c}{\frac{1}{2}ab+ac}=\frac{\frac{1}{3}ab+ac}{\frac{1}{2}b+c}=\left(\frac{\frac{1}{3}b+c}{\frac{1}{2}b+c}\right)a;$$

l можно найти, как четвертую пропорциональную

$$\frac{\frac{1}{2}b+c}{\frac{1}{3}b+c}=\frac{a}{l}.$$



При этом AC надо мерить от точки подвеса A до центра тяжести груза C, а размерами груза C здесь пренебрегают, считая их чрезвычайно малыми.

Фиг. 112.

Теперь допустим (фиг. 112), что кроме груза C имеется еще другой груз D на стержне. Его вес или число частичек равно d, его расстояние $AD=f$. Для нахождения длины всего маятника надо к прежней сумме квадратов прибавить еще сумму квадратов расстояний частичек d от оси вращения. Эта сумма, очевидно, равна df^2, так что вся сумма теперь равна $\frac{1}{3}a^2b+a^2c+f^2d$. Равным образом к сумме расстояний надо прибавить сумму расстояний частичек d от

A, т. е. df; таким образом, общая сумма расстояний равна $\frac{1}{2}ba+ca+df$. Разделив сумму квадратов на эту сумму, получим длину изохронного простого маятника

$$\frac{\frac{1}{3}a^2b+a^2c+f^2d}{\frac{1}{2}ba+ca+df}.$$

Пусть эта длина изохронного простого маятника должна быть равна некоторой заданной длине, например p; равным образом, даны и все другие величины, кроме AD или f, определяющей положение груза D, и надо найти это расстояние AD. Тогда можно поступать следующим образом:

Требуется

$$\frac{\frac{1}{3}a^2b+a^2c+f^2d}{\frac{1}{2}ba+ca+df}=p;$$

отсюда

$$f^2=pf+\frac{\frac{1}{2}abp+caf-\frac{1}{3}a^2b-a^2c}{d},$$

$$f=\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2+\frac{\frac{1}{2}abp+cap-\frac{1}{3}a^2b-a^2c}{d}}.$$

При этом следует заметить, что оба корня пригодны только тогда, когда

$$\frac{1}{2}abp+cap<\frac{1}{3}a^2b+a^2c,$$

$$p<\frac{\frac{1}{3}ab+ac}{\frac{1}{2}b+c}.$$

Эту величину мы нашли раньше как длину изохронного простого маятника, или как расстояние центра качания от точки подвеса для случая, когда маятник состоит только из стержня BC и груза C.

Следовательно, если мы хотим ускорить ход часов прикреплением груза D, то мы можем прикрепить его в двух точках, например E и D, между A и C и в обоих случаях мы сообщим маятнику ту же скорость. Обе эти точки будут равно удалены от точки N, расстояние которой от $A = \frac{p}{2}$, т. е. представляет половину длины простого маятника, который надо сделать изохронным с нашим. Если длина p лишь немногим меньше AC, то N, очевидно, будет расположено лишь немногим выше середины стержня AC.

Из приведенного выше равенства

$$f = \frac{1}{2} p \pm \sqrt{\frac{1}{4} p^2 + \frac{\frac{1}{2} abp + cap - \frac{1}{3} a^2 b - a^2 c}{d}}$$

можно получить определение величины p. Очевидно, должно быть

$$\frac{1}{4} p^2 + \frac{\frac{1}{2} abp + cap}{d} \geqslant \frac{\frac{1}{3} a^2 b + a^2 c}{d};$$

$$p \geqslant \frac{a}{d} \sqrt{\frac{4}{3} bd + 4cd + b^2 + 4bc + 4c^2} - \frac{ab + 2ac}{d}.$$

Если p как раз равно этой величине, т. е.

$$\frac{1}{4} p^2 + \frac{\frac{1}{2} abp + cap}{d} = \frac{\frac{1}{3} a^2 b + a^2 c}{d},$$

то первое уравнение превращается в

$$f = \frac{1}{2} p,$$

т. е.

$$f = \frac{a}{2d} \sqrt{\frac{4}{3} bd + 4cd + b^2 + 4bc + 4c^2} - \frac{ab + 2ac}{2d}.$$

Это выражение определяет то расстояние груза D от A, при котором ускоряющее воздействие груза D на ход часов будет всего сильнее.

К часам полученный вывод применяется следующим образом.

Пусть маятник часов отмечает каждым простым колебанием одну секунду. Пусть вес стержня составляет $^1/_{50}$ веса груза, прикрепленного внизу стержня. Кроме этого груза по стержню может передвигаться еще малый груз одинакового веса со стержнем. Требуется установить, где надо на стержне закрепить груз, чтобы ускорить ход часов на 1 минуту за время 24 часа. Затем, где надо закрепить груз, чтобы ускорение составляло 2 минуты, 3 минуты, 4 минуты и т. д.

Умножив 24 часа на 60, получаем 1440, число минут в сутках. Если ускорение должно составить 1 минуту, то надо вычесть 1 минуту, получается 1439. Теперь почти точно:

$$1440^2 : 1439^2 = 1440 : 1438.$$

Если представить себе длину простого маятника, дающего секунды, разделенной на 1440 равных частей, и если другой маятник содержит 1438 таких частей, то он в течение суток уйдет вперед на 1 минуту относительно первого маятника. Следовательно, здесь следует p приравнять 1438 частям.

Так как маятник часов, состоящий из металлического стержня и прикрепленного к нему груза, должен быть изохронен простому маятнику в 1440 частей, то надо прежде всего из вышеприведенного уравнения найти длину стержня.

Величина

$$\frac{\frac{1}{3}ab + ac}{\frac{1}{2}b + c}$$

представляет длину простого маятника, изохронного составному, если составной состоит из стержня длиною a и весом b и из прикрепленного к нему груза весом c. Назовем длину изохронного простого маятника s, тогда

$$a = \frac{\frac{1}{2}bs + cs}{\frac{b}{3} + c}.$$

Если мы примем $c=50$, $b=1$, $s=1440$, то длина стержня

$$a=1444\frac{4}{5}.$$

Из равенства

$$f=\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2+\frac{\frac{1}{2}abp+acp-\frac{1}{3}a^2b-a^2c}{d}}$$

получается

$$f=\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2+72962p-105061210.}$$

Если p содержит 1438 частей, как мы сказали, то отсюда находится

$$f=1331\frac{1}{2}$$

таких частей, каких s — простой маятник, отбивающий секунды, имеет 1440. Если определить фут таким образом, чтобы длина s содержала 3 фута (я назвал так определенный фут — часовым футом), то длина f равняется 33 и $^3/_{12}$ дюйма, или, как принято говорить, 33 дюймам и 3 линиям.

Вычитая эту величину из общей длины 3 фута, мы получаем 2 дюйма 9 линий. На эту величину надо переместиться вверх из центра качаний, чтобы найти то место, где груз D вызовет ускорение в 1 минуту в течение 24 часов. Таким же образом я рассчитал и другие места, указанные на стержне,

Ускорение часов за 24 часа		Отрезки, на которые надо сдвинуть груз D вверх от центра тяжести, в линиях и десятых долях линий часового фута
мин.	сек.	
0	15	7.0
0	30	15.2
0	45	23.7
1	0	32.6
1	15	41.9
1	30	51.7
1	45	62.2
2	0	73.4
2	15	85.6
2	30	99.0
2	45	114.1
3	0	131.8
3	15	154.3
3	30	192.6

13*

давая величине p все разные значения, и собрал результат в выше помещенной таблице. На основании этих результатов я разделил так же стержень, изображенный выше при описании часов. В таблице слева стоят ежесуточные ускорения, а именно, как я уже излагал, через каждые 15 сек. (или $\frac{1}{4}$ минуты). Если, например, передвигаемый груз D находится на делении 73.4 и если найдено, что часы в течение 24 часов отстают на 15 сек., тогда надо для получения правильного хода часов передвинуть груз вверх до штриха 85.6. При этом центр качаний расположен на 1.4 части выше центра тяжести C.

Предложение XXIV

У маятника, подвешенного между циклоидами, нельзя определить центр качания; как преодолевают возникающую от этого трудность.

Если кто-нибудь, с целью тщательной проверки, сравнит то, что я раньше доказал относительно маятника, подвешенного между циклоидами, с тем, что относится к центру качания, то ему покажется, что чего-то нехватает для полного равенства колебаний, о котором я учил. У него прежде всего возникает сомнение, должен ли он для нахождения круга, образующего циклоиду, считать длину маятника от точки подвеса до центра тяжести подвешенного свинцового груза, или же — до центра качания, который отличается от первой точки на очень заметную длину, и притом тем большую, чем больше подвешенный свинцовый шар или чечевица. Как быть, если размер шара составляет четверть или даже треть длины маятника. И если я даже скажу, что указанную длину надо считать до центра качания, то все-таки останется неясным, как применить мое учение о центре качания к маятнику, который постоянно меняет длину; ведь таков маятник, подвешенный между циклоидами. Именно можно подумать, что при изменении длины меняется и положение центра качания. Однако не надо приходить к таким выводам.

Правда, это дело трудно формулировать, если мы желаем всюду соблюсти строгость и точность. Ведь при доказательстве равенства периодов колебаний у циклоиды мы рассматривали двигающееся по циклоиде тело, как бы весомую точку. Что касается практического результата, эту трудность не следует считать большой. Ибо хотя вообще лучше, чтобы вес маятника часов был больше, но нет надобности брать его столь большим, чтобы расстояние от центра тяжести до центра качания имело бы какое-либо значение. Если же мы хотим избежать всех трудностей, то нам надо только сделать шар или чечевицу маятника вращающимися вокруг горизонтальной оси. Концы этой горизонтальной оси надо пропустить через нижний конец стержня, который должен быть расщеплен на два в нижней своей части. Тогда, по природе движения, шар маятника будет сохранять свое положение относительно горизонтальной плоскости и все его точки, так же как и центр, будут описывать совпадающие циклоиды. Поэтому рассмотрение центров качания становится излишним.

Подобный маятник дает столь же полное равенство периодов, как если бы его вес был сосредоточен в одной точке.

Предложение XXV

О способе введения всеобщей неизменной меры.

Прочная надежная мера длины, не меняющаяся со временем, не подверженная случайностям, не могущая погибнуть или пострадать от каких-либо превратностей, вещь чрезвычайно полезная, и уже давно многие ищут такую меру. Если бы такая мера существовала в древности, то рассуждения о длине римского, греческого и древнееврейского футов не были бы теперь так спорны. Такая мера легко может быть установлена при помощи моих часов, в то время как без них это сделать невозможно или во всяком случае очень трудно. Правда, многие пробовали это сделать при помощи колебаний простого маятника: они считали колебания в течение полного оборота небесного свода или в течение определенной части его, кладя в основу наблюдение неподвижных звезд, разность прямых восхождений которых известна. Но этим способом нельзя достичь той же точности, как при пользовании часами, и продолжительный счет колебаний чрезвычайно труден и неприятен. Кроме применения часов для строго точного установления неизменной меры полезно знать центры качания; поэтому я приступаю к изложению этого вопроса только теперь, после рассмотрения центров качания. Очень удобны для нашей цели часы, у которых колебание длится целую или полсекунды и которые снабжены секундной стрелкой.

Именно, если установить такие часы по методу, изложенному мною при описании часов, при помощи наблюдения неподвижных звезд, на среднюю длину дня (солнечных суток), то надо рядом повесить другой, простой маятник, т. е. шар из свинца или другого тяжелого вещества, подвешенный на тонкой нити, и слабо толкнуть этот маятник; потом надо удлинять или укорачивать нить, пока колебания маятника не будут в течение $^1/_4$ или получаса точно совпадать с колебаниями маятника часов. Я сказал, что маятник надо только слабо толкнуть, так как при малых колебаниях, в 5—6 градусов, период колебаний еще достаточно постоянен, при больших колебаниях это не в той мере справедливо.[163]

Если теперь измерить расстояние от точки подвеса до центра качания простого маятника и разделить его в том случае, если каждое движение вправо или движение влево каждый раз длится 1 секунду, на три части, то эта часть есть длина фута, который я раньше назвал часовым футом. Эта мера не только может быть определена везде в мире, но и на все будущие века может быть всегда восстановлена. Следовательно, может быть точно указана на все времена и всякая другая футовая мера, если только определено ее отношение к указанной выше мере. Я уже указал, что парижский фут относится к часовому футу, как мы его здесь определили, как 864:881. Это то же самое, как если бы я сказал, что простой маятник, совершающий одно колебание в 1 секунду, имеет в старых парижских футах длину 3 фута 8 линий.[164]

Но отношение парижского фута к рейнскому футу, который принят в моем отечестве, есть 144 : 139, т. е. из парижского фута надо вычесть 5 линий, чтобы получить рейнский. Таким образом, этот фут и любая другая мера устанавливаются на вечные времена.

Выше показано, как находят центр качания шара, подвешенного на нити любой длины. Надо определить третью пропорциональную к расстоянию от точки подвеса до центра шара и к радиусу шара. Искомый центр качания лежит на $^2/_5$ этой величины ниже центра шара.

Легко видеть, почему для точного установления часового фута необходимо введение центра качания. Если взять просто расстояние от точки подвеса до центра шара, не учитывая величину шара по сравнению с длиной пути, то длина простого маятника, одно движение которого вправо или влево равно 1 секунде, не будет точно определена. Мы найдем для расстояния между точкой подвеса и центром шара тем меньшую величину, чем больше шар. Действительно, у изохронных маятников расстояния от точки подвеса до центра качания всегда одни и те же, но у бо́льших шаров центр качания отстоит от центра шара на бо́льшие расстояния, чем у маленьких.[165]

Это должны были бы принять во внимание те, которые до определения поднятия центра качания пытались ввести всеобщую меру длины. Такую задачу взяло на себя высокочтимое английское Королевское общество немедленно после изобретения мною часов, а теперь недавно ученейший астроном из Лиона[166] Габриэль Мутон. Я говорю, эти ученые должны были бы учесть размеры подвешенного шара, либо в отношении длины нити, от которой он составляет, например, одну тридцатую или другую часть, либо в известной мере, например, в дюймах и линиях.[167] Если итти по второму пути, то принимается за известное то, что еще надо доказать. Я, конечно, знаю, что ошибка едва заметна, пока шары не на много превосходят ту величину, которую я назвал.

По первому пути можно добраться до удовлетворительных результатов, но тогда надо взять на себя труд считать колебания и затем вычислять. Поэтому предпочтительнее пользоваться центрами качаний и таким образом итти определенной дорогой и пользоваться только теми законами, которые сюда относятся. При этом лучше брать сравнительно большие шары, а не маленькие, так как на больших меньше сказывается сопротивление воздуха.

Впрочем, для определения всеобщей меры годятся не только подвешенные на нити шары, но и конусы, цилиндры и все другие тела и плоские фигуры, центр качания которых мы выше определили; ведь все изохронные маятники имеют одно и то же определенное расстояние от точки подвеса до центра качания.

Не нужно также непременно употреблять такие часы, маятник которых совершает один возврат в течение полусекунды или целой секунды. Можно притти к цели при помощи часов с маятниками любой другой длины. Нужно только иметь возможность из соотношения колес или из числа зубцов определить число колебаний в определенный промежуток времени.

Именно, если найдется простой маятник, одно колебание которого соответствует одному, двум или трем колебаниям часового маятника, то из этого можно определить, сколько колебаний простой маятник совершает в 1 час. Тогда квадрат этого числа относится к квадрату числа 3600, т. е. числа секунд, составляющих час, как длина маятника в 3 часовых фута, о котором мы говорили, к длине найденного простого маятника (эту длину всегда надо считать от точки подвеса до центра качания). Это вытекает из того, что длины каких-либо двух маятников относятся между собой, как квадраты времен, потребных для одного колебания, вследствие этого они обратно пропорциональны квадратам чисел, которые указывают, сколько колебаний происходит за определенный промежуток времени.

В то время как до сих пор теорема о пропорциональной длине маятника квадрату периода колебания подтверждалась только опытом, теперь она является строго доказанной рассуждениями, выше проведенными. Именно, мы показали, что время колебания маятника, подвешенного между двумя циклоидами, находится в определенном отношении к длительности свободного падения на половину длины маятника, а именно, в отношении окружности круга к диаметру его. Отсюда легко заключить, что длительности колебаний двух различных маятников относятся между собой, как времена падения на половину их длины. Эти половинные (или целые) длины относятся между собой, как квадраты времен, в течение которых падение совершается (по предложению III второй части), а следовательно, и как квадраты времен, в течение которых совершается одно колебание. Малые колебания простого маятника не отличаются заметно от малых колебаний маятника той же длины, подвешенного между циклоидами. Поэтому и длины простых маятников относятся между собой, как квадраты времен, в течение которых они совершают очень малые колебания.

Если кто-либо согласен взять на себя труд считать число колебаний в течение одного часа или получаса и имеет в своем распоряжении часы, снабженные секундной стрелкой, то он определит число колебаний простого маятника в час, какова бы ни была его длина. Отсюда он вычислит длину рассмотренного выше трехфутового маятника, отбивающего секунды.

Предложение XXVI

Определить расстояние, проходимое свободно падающими весомыми телами в определенное время.

Все лица, предпринимавшие измерения в этом направлении, должны были ставить опыты, но эти опыты так, как они до сих пор производились, не легко дают точный результат, так как свободно падающие тела, к концу их движения обладают очень большими скоростями. С другой стороны, мое предложение XXV второй части позволяет с полной точностью решить задачу, исходя из известной длины секундного маятника, без надобности в дальнейших опытах. Прежде всего мы установим расстояние, на которое тело падает в течение 1 секунды, а отсюда легко вычислить все другие расстояния. Секундный маятник имеет, как мы сказали, длину 3 часовых фута; время очень малого колебания маятника относится ко времени падения через половину длины маятника, как окружность круга к его диаметру, т. е. как 355 : 113. Как первое из этих чисел ко второму, будет относиться время 1 секунды или 60 терций к некоторому времени, и это другое время $19^1/_{10}$ терций [168] будет то время, в течение которого свободно падающее тело проходит половину длины маятника, т. е. 18 дюймов.

Как показано в предыдущей теореме, пути, проходимые при свободном падении, относятся, как квадраты времен. Следовательно, путь, проходимый в 1 секунду или 60 терций, при свободном падении относится к пути, проходимому в $19^1/_{10}$ терций, как квадрат 60 к квадрату $19^1/_{10}$, т. е. как 360 000 к 36 481; отсюда получается: путь, проходимый при свободном падении в 1 секунду, равен 14 футам 9 дюймам 6 линиям.[169]

Но так как часовой фут относится к парижскому футу, как 881 : 864, то это расстояние в последней мере будет почти точно 15 футов и 1 дюйм. Этот результат точно совпадает с очень тщательными опытами, которые я произвел. В этих опытах момент времени, в который оканчивалось падение, определялся не ухом или глазом, так как оба были бы недостаточно достоверны; путь, пройденный при падении, определялся безошибочно другим методом, который я сейчас попытаюсь изложить. Время, потребное для падения, определяется половиной колебания маятника, подвешенного около стены или доски. Для того чтобы шарик маятника и падающее тело (свинцовый груз) начинали движение одновременно, они соединялись тонкой нитью, которая их удерживала. Эта нить затем пережигалась.

Но до пережигания к падающему грузу прикреплялась еще другая нить такой длины, что она натягивалась падающим грузом раньше, чем маятник ударялся о стену. Другой конец нити прикреплялся к полосе из бумаги или к тонкой пленке, а эта в свою очередь так прикреплялась к стене или доске, что она приходила в движение при слабом натяжении нити и падала вдоль стены, как раз проходя через то место, в которое должен был удариться шар маятника. Когда падающий груз протянет всю длину веревки, он еще протянет часть полосы раньше, чем маятник достигнет доски. Как велика эта часть полосы, покажет шар маятника, который закопчен и оставит след на скользящей полосе. Если к этой части прибавить длину нити, то в точности получится длина, пройденная при падении.

Для того чтобы вычисленные для свободного падения величины совпали с наблюденными, необходимо пренебречь сопротивлением воздуха. Это сопротивление действительно недостаточно велико, чтобы обнаружиться при высотах падения, имевших место при опытах; необходимо только, чтобы тела были металлические или, если они изготовлены из более легкого материала, имели достаточную величину. Именно при падении через воздух легкость вещества компенсируется величиной тела таким образом, что шар из дерева или даже из пробки производит то же движение, что и свинцовый шар, если диаметры легких шаров относятся к диаметру свинцового шара, как удельный вес свинца к удельному весу дерева или пробки.[170]

В этом случае веса тел будут относиться, как их поверхности. На самом деле, для того чтобы тела совсем различных удельных весов падали с одинаковой скоростью, поскольку мы можем судить об этом при помощи наших органов чувств, совсем не нужно, чтобы их диаметры были бы в указанном выше отношении. Скорости могут быть равны друг другу, лишь бы оба тела были достаточно велики или падали с не слишком большой высоты. Именно, как можно наблюдать, большая высота падения или, при малой высоте, малый вес тел могут привести к тому, что ускорение при движении, вследствие сопротивления воздуха, чрезвычайно сильно отступает от ранее выведенных законов.

Вообще говоря, для каждого тела, движущегося через воздух или какую-либо другую среду, существует скорость, определяемая его весом и его поверхностью, скорость, которую он не может превзойти, или, вернее, которой он никогда не может достичь, а именно, это та скорость, с которой воздух или другая среда должны были бы двигаться вверх, чтобы удержать как раз это в нем находящееся тело на своем месте.

Может быть в другой раз в другом месте представится случай подробнее остановиться на этом вопросе.

ПЯТАЯ ЧАСТЬ „МАЯТНИКОВЫХ ЧАСОВ“

содержащая другую конструкцию часов с использованием кругового движения маятников, и теоремы о центробежной силе

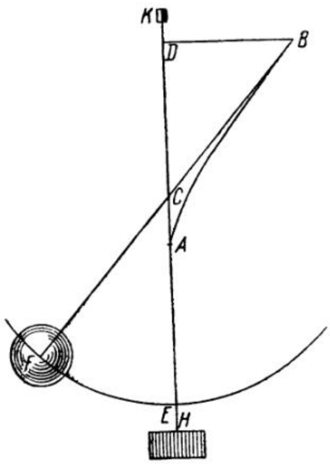
Существует еще другой вид колебательного движения кроме того, который мы пока рассматривали, а именно тот вид, при котором груз маятника движется по окружности круга. Исходя из этого, я пришел к изобретению других часов примерно в то же время, когда я изобрел первые. Эти другие часы основаны на столь же достоверной равномерности, как и первые, но стали менее употребительны, так как производство первых часов до известной степени проще и легче. Все-таки несколько таких часов, о которых мы теперь говорим, были осуществлены не без успеха. Их особенностью является то, что секундная стрелка движется кругом в непрерывном равномерном движении, в то время как у моих первых часов и всех прочих часов она движется скачками; а также и то, что механизмы подобного рода имеют совершенно бесшумный ход. Правда, при астрономических наблюдениях этот повторяющийся каждую секунду удар не бесполезен.

Сначала, правда, у меня было намерение издать описание этих часов вместе с теоремами, относящимися к круговому движению и к центробежной силе, как я хочу ее назвать. Но относительно этого предмета у меня больше материала, чем времени для его изложения в настоящий момент.

Но для того чтобы лица, интересующиеся этим вопросом, быстрее познакомились с новым, отнюдь не бесполезным открытием, чтобы какая-либо случайность не помешала опубликованию, я, противно моему первоначальному предположению, присоединил еще и эту часть к предыдущим. В ней кратко описывается конструкция новых часов и далее следуют теоремы о центробежной силе; их доказательство откладывается на более позднее время.

Конструкция вторых часов

Я не счел нужным изложить здесь распределение колес внутри часового механизма; это устройство легко могут осуществить часовщики в различных вариантах. Будет достаточным описать ту часть часов, которая регулирует их ход определенным образом.



Фиг. 113.

Следующий рисунок (фиг. 113) изображает эту часть часов.

Ось DH следует представлять себе вертикальной, способной вращаться в двух подшипниках. В A к оси приделана пластинка, имеющая определенную ширину и искривленная по кривой AB, которая есть полукубическая парабола, при сматывании нити с которой и прибавлении некоторой длины описывается парабола EF, как доказано в теореме VIII третьей части. AE — длина, на которую надо удлинить нить; путем сматывания всей линии BAE и образуется парабола EF. BCF — нить, закрепленная на кривой AB, конец которой описывает параболу. К нити прикреплен груз F. Если ось DH вращается, тогда нить BCF, вытянутая в прямую, повлечет за собой груз F, который будет описывать горизонтальные круги. Эти круги будут больше или меньше, в зависимости от большей или меньшей силы, с которой действуют на ось колеса, вращающие барабан K. Но все эти круги будут лежать на параболическом коноиде, и именно потому продолжительность одного оборота будет всегда одна и та же, как вытекает из того, что я объясню об этом движении впоследствии. Если оборот должен совершаться в полсекунды, то параметр параболы EF должен составлять $4^1/_2$ дюйма моего часового фута, т. е. он должен быть равен половине длины маятника, у которого каждое колебание длится $^1/_2$ секунды. Из параметра параболы определяется параметр полукубической параболы; он равен $^{27}/_{16}$ первого параметра; определяется также отрезок AE, который равен половине длины параметра параболы EF. Если же оборот должен совершаться в секунду, то надо все длины брать в четыре раза больше как параметры, так и длину AE.

Я, правда, до сих пор описывал нить BCF как ординарную и простую, но гораздо лучше, если она двойная в своей верхней части и затем соединяется в одну около F, причем обе нити сходятся под углом 20—30 градусов, поэтому и пластинка AB должна быть около B такой ширины, как этого требует расстояние двух нитей друг от друга, или же она также должна быть раздвоенной. При этом круговое движение груза F будет поддерживаться без всяких других вспомогательных средств и вес будет как раз натягивать нить, на которой он висит; этого не было бы, если бы груз держался на одной нити. Остается еще указать, что сила, необходимая для продолжения вращения, происходит от механизма часов, приводимого в движение грузом или иным способом. Сила через барабан K передается оси, и достаточно совсем слабой силы, чтобы поддерживать раз приведенный в движение шар.

Чтобы это совершалось легче, надо освободить вращение оси KH, по возможности, от трения. Опыт показывает, что это лучше всего достигается, если нижний конец оси сделать из закаленной стали и заставить ее вертеться на алмазной плоскости. Нужен только очень небольшой кусок этого камня, который вделывают в просверленную пластинку.

Вместо нити BGF можно в той части, которая должна прилегать к AB, взять тонкую цепочку, золотую или из другого металла, чтобы лучше гарантировать неизменность длины. Это же я испытал и с другими часами, где маятник висит между циклоидами. Но там гибкость нити получается недостаточной, вследствие трения колец, и, таким образом, цепь затрудняет свободное движение маятника.

Теоремы о центробежной силе, вызванной круговым движением

I

Если два одинаковые тела в одинаковое время описывают неодинаковые окружности, то их центробежные силы относятся, как длины окружностей или как диаметры.

II

Если два одинаковых тела движутся с одинаковой скоростью по окружности разных кругов, то их центробежные силы обратно пропорциональны диаметрам.

III

Если два одинаковых тела движутся по одинаковым кругам с разной скоростью, но оба равномерно, как мы это здесь всегда подразумеваем, то их центробежные силы относятся, как квадраты скоростей.

IV

Если два одинаковых тела движутся по разным окружностям и обнаруживают одиноковую центробежную силу, то их времена обращения относятся, как корни квадратные из диаметров.

V

Если тело движется по окружности круга с той скоростью, которую бы оно приобрело, свободно падая с высоты $^1/_4$ диаметра круга, то испытываемая им центробежная сила равна весу, т. е. оно тянет за нить, при помощи которой оно прикреплено к центру, с той же силой, как если бы было подвешено к нити.

VI

Если тело пробегает различные горизонтальные окружности, которые все лежат на кривой поверхности параболического коноида (параболоида) с вертикальной осью, то время оборота всегда одно и то же, будут ли круги больше или меньше, и это время обращения вдвое больше продолжительности колебания маятника, длина которого равна половине периметра образующей параболы.

VII

Пусть два тела висят на нитях разной длины и описывают горизонтальные круги, в то время как другой конец нити неподвижен. Если конусы, поверхность которых описывают нити, имеют одинаковую высоту, то и времена обращения обоих тел одинаковы.

VIII

Пусть два тела кружат, как в предыдущей теореме, в коническом движении, вися на нитях одинаковой или разной длины. Если конусы имеют разные высоты, то времена обращения относятся, как корни квадратные из высот.

IX

Если подвешенное на нити тело описывает очень малые горизонтальные круги, то продолжительность одного оборота относится ко времени, в котором тело в свободном *падении прошло бы длину, превышающую длину нити маятника в два раза, как окружность круга к его диаметру. Следовательно, нужное для оборота время то же, что и время двух боковых очень малых колебаний обыкновенного маятника той же длины.*

X

Пусть тело движется по кругу и совершает полный оборот в то время, как маятник с длиною, равной радиусу круга, совершает при коническом движении малый оборот или же два малых боковых колебания; в таком случае центробежная сила равна его весу.

XI

У любого конического маятника время обращения равно времени, в течение которого свободно падающее тело прошло бы длину нити маятника, если угол наклона нити к горизонту равен примерно 2°54′. Время обращения точно равно указанному времени, если синус указанного угла равен отношению вписанного в окружность квадрата к квадрату окружности.

XII

Если два конических маятника одинакового веса, но с различной длиной нитей, описывают конусы одинаковой высоты, то силы, с которыми натянуты нити, относятся, как длины нитей.

XIII

Пусть простой маятник совершает наибольшее возможное боковое колебание, т. е. он падает через всю четверть круга, тогда в низшей точке своего пути груз натянет нить с силой в три раза большей, чем если бы он просто висел на нити.

О ДВИЖЕНИИ ТЕЛ ПОД ВЛИЯНИЕМ УДАРА[1]

ГИПОТЕЗЫ

I

Тело, приведенное в движение, при отсутствии противодействия продолжает свое движение неизменно с той же скоростью и по прямой линии.

II

Не входя в рассмотрение причины отскакивания твердых тел[2] *после соударения, принимаем следующее положение:*

Если два одинаковых тела, движущихся с одинаковой скоростью навстречу друг другу, сталкиваются прямым ударом, то каждое из них отскакивает назад с той же скоростью, с какой ударилось.[3]

Удар называется прямым, если само движение и соприкосновение происходят на прямой линии, соединяющей центры тяжести тел.[4]

III

Движение тел, а также их одинаковые или разные скорости надо рассматривать как относительные по отношению к другим телам, которые мы считаем покоящимися, не учитывая того, что как те, так и другие тела могут участвовать в другом, общем движении. Поэтому два тела, соударяясь, даже в случае, если оба вместе участвуют *еще в другом равномерном движении, для лица, также участвующего в общем движении, действуют друг на друга так, как будто бы этого общего движения не существовало.*[5]

Если, например, пассажир корабля, движущегося равномерно, вызовет удар двух равных шаров с одинаковыми, опять-таки по отношению к пассажиру, скоростями, то эти шары отскочат с одинаковыми, по отношению к пассажиру и кораблю, скоростями, совсем так, как если бы пассажир вызвал удар этих шаров на неподвижном корабле или на берегу.[6]

Положив такие гипотезы в основу рассмотрения удара равных тел, выведем законы их воздействия друг на друга; в дальнейшем, в должном месте, мы введем еще новые гипотезы, которые нам потребуются при рассмотрении соударения неодинаковых тел.

Предложение I[7]

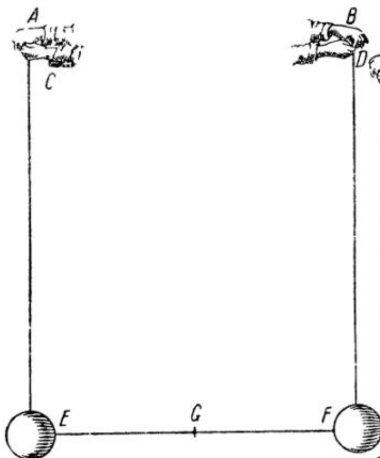
Если с покоящимся телом соударяется одинаковое с ним тело, то ударившееся тело приходит в состояние покоя, а покоящееся тело приходит в движение со скоростью ударившегося о него.

Представим себе, что лодка плывет у берега по течению, и притом так близко к берегу, что пассажир лодки может подать руки человеку, стоящему на берегу. Пусть пассажир лодки держит в своих руках A и B (фиг. 1) два одинаковых, подвешенных на нитях тела E и F. Расстояние EF делится пополам в точке G. Пассажир лодки, двигая свои руки навстречу одна другой с одинаковой скоростью по отношению к себе и лодке, вызовет удар шаров, которые затем отскочат один от другого с одинаковыми скоростями относительно пассажира и лодки (по второй гипотезе). Пусть лодка движется влево со скоростью GE, т. е. с той же самой скоростью, с которой рука A движется вправо. Ясно, что относительно берега и человека, стоящего на берегу, рука A пассажира находится в покое, а рука B, с точки зрения того же человека, движется со скоростью FE, удвоенной по сравнению с GE или FG. Представим себе теперь, что человек, стоящий на берегу, схватил своей рукой C руку A пассажира и вместе с тем конец нити, на которой висит шар E, а другой рукой D — руку пассажира B, держащую нить, на которой подвешен шар F. Тогда произойдет следующее: в то время как пассажир лодки двигает шары навстречу один другому с одинаковой скоростью (относительно себя и лодки), человек, стоящий на берегу, ударяет по неподвижному шару E шаром F, движущимся со скоростью FE. Для пассажира лодки, двигающего шары указанным способом, не имеет никакого значения то обстоятельство, что человек на берегу схватил его руки и концы нитей, так как человек на берегу только участвует в движении, но движению не мешает (фиг. 1). По той же причине человеку на берегу, который ударяет шаром F по неподвижному шару E, не мешает сплетение рук с пассажиром лодки, если только руки A и C покоятся относительно берега и человека, стоящего на берегу, а руки D и B движутся с одинаковой скоростью FE. Ввиду того, что, как сказано, шары E и F отскакивают с одинаковыми скоростями, а именно, шар E — со скоростью GE, а шар F — со скоростью GF относительно лодки и пассажира, а сама лодка за это время проплывает влево со скоростью GE или FG, то относительно берега и человека, стоящего на берегу, шар F после удара останавливается, а шар E, с той же точки зрения, движется влево с двойной скоростью FE, той же самой, с которой человек на берегу двигал шар F к шару E. Таким образом, мы доказали, относительно человека, стоящего на берегу, который ударял по неподвижному шару другим шаром, одинаковым с первым, что первоначально двигавшийся шар потерял при ударе все свое движение, а первоначально неподвижный шар приобрел все движение. Это и требовалось доказать.[8]

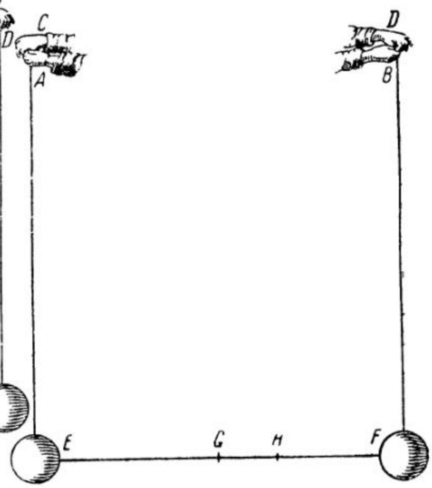
Предложение II

Если два одинаковых тела соударяются с разными скоростями, то они при ударе обмениваются скоростями.

Пусть тело E движется направо со скоростью EH (фиг. 2), а одинаковое с ним тело F движется ему навстречу с мень-



Фиг. 1



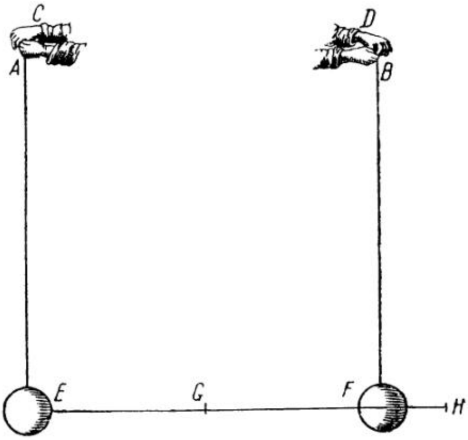
Фиг. 2.

шей скоростью FH. Следовательно, они встретятся в H. Я утверждаю, что после удара тело E будет двигаться влево со скоростью FH, а тело F — вправо со скоростью EH.

Представим себе человека, стоящего на берегу реки и следующим образом производящего указанные движения тел. Он держит в руках C и D концы нитей, на которых висят указанные тела, и сближает руки со скоростями EH и FH, сближая, таким образом, и тела E и F.

Пусть расстояние E делится пополам в G. Представим себе лодку, движущуюся вправо со скоростью GH, и на лодке человека; по отношению к этому человеку скорость шара E будет только EG, а скорость шара F будет FG.

Таким образом, относительно человека в лодке оба шара стремятся к столкновению с равными скоростями. Пусть человек в лодке схватил своими руками A и B руки C и D человека, стоящего на берегу, и вместе с руками — концы нитей. Тогда человек, стоящий на берегу, движет шары навстречу один другому со скоростями EH и HF, а человек в лодке — с одинаковыми скоростями EG и FG. Следовательно, с точки зрения человека в лодке оба шара отскочат один от другого с той же скоростью (гипотеза II), а именно, E отскочит со скоростью GE, а F — со скоростью GF. В то же время лодка движется вправо со скоростью GH. Поэтому относительно берега и человека на берегу F будет иметь скорость EH, составленную из GF и GH, а E — скорость HF, разность GE и GH. Следовательно, относительно человека на берегу, вызывающего соударение шаров E и F со скоростями EH и FH, шар E после удара отскакивает со скоростью FH, а шар F — со скоростью EH, что и требовалось доказать.[9]



Фиг. 3.

Если оба тела движутся вправо и притом E со скоростью HE, а F с меньшей скоростью FH (фиг. 3), то тело E нагонит тело F, и они встретятся в H. Я утверждаю, что после удара F будет продолжать движение со скоростью EH, а E — следовать со скоростью FH. Доказательство подобно вышеприведенному.[10]

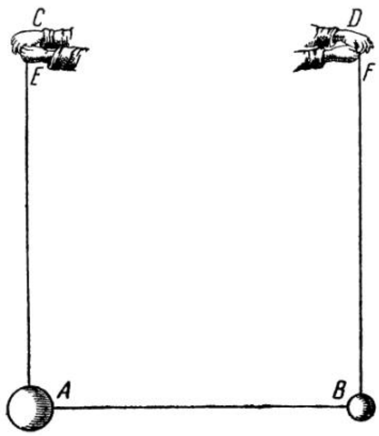
Гипотеза IV

Если большее тело соударяется с меньшим, находящимся в покое, то оно сообщает последнему некоторое движение и, следовательно, теряет несколько в своем движении.

Предложение III

Любое большое тело приводится в движение любым малым телом при любой скорости малого тела.[11]

Представим себе лодку, плывущую около берега реки; в лодке стоит человек и держит тела A и B, подвешенные на нитях (фиг. 4). Пусть тело A, которое человек держит левой[12] рукой, большее, а тело B меньшее тело. Человек в лодке оставляет руку D, держащую тело B, неподвижной относительно себя и лодки, а руку C и с нею тело A двигает по направлению к B с произвольной скоростью AB. Согласно гипотезе IV, телу B передается некоторая доля движения, и тело A потеряет немного в своей скорости и будет двигаться дальше направо со скоростью, несколько меньшей, чем AB. Представим себе, что лодка движется налево со скоростью BA. Тогда тело A в то время, пока человек в лодке двигает его со скоростью BA относительно себя и лодки, будет находиться в покое относительно берега и наблюдателя на берегу. То же относится и к руке C. С другой стороны, рука D, с точки зрения наблюдателя на берегу, будет двигаться вместе с телом B налево со скоро-



Фиг. 4

стью AB, так как она принималась неподвижной относительно лодки, а лодка движется налево со скоростью BA. Пусть теперь наблюдатель на берегу схватывает своими руками E и F руки пассажира C и D; тогда становится ясным следующее: в то время как пассажир лодки движет шар А по направлению к неподвижному для пассажира шару B, наблюдатель на берегу движет шар B к шару A, покоящемуся относительно берега и наблюдателя на берегу.

Мы указали, что после удара тела A будет двигаться направо с несколько меньшей, чем AB, скоростью; лодка движется налево со скоростью AB. Отсюда следует, что относительно берега и наблюдателя тело A после удара имеет некоторое движение влево. Итак, относительно наблюдателя на берегу, который ударял произвольно малым телом B с произвольной скоростью о неподвижное произвольно большое тело, это тело A приходит в движение, что и требовалось доказать.

Гипотеза V

Если при соударении двух твердых, движущихся навстречу друг другу тел обнаруживается, что одно из них сохранило все движение, то и другое не выигрывает и не теряет ничего в движении.[13]

Предложение IV

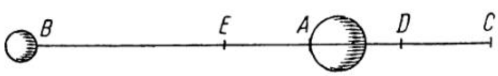
Если два тела сталкиваются, то их относительная скорость удаления после удара та же, что и относительная скорость сближения до удара.[14]

Для одинаковых тел это очевидно по теореме II. Пусть тела будут неравны и пусть сначала рассматривается случай, когда на покоящееся большее тело движется меньшее B со скоростью BA, направленной вправо (фиг. 5).

Пусть для пробега BA телу B потребовалось некоторое время.

Я утверждаю, что и после удара через такой же промежуток времени тела будут разделены промежутком BA. Тело A, несомненно, получит от удара некоторую скорость AC. Эта скорость должна быть меньше, чем BA, так как только при равенстве A и B тело A приобрело бы скорость BA (предложение I).

Разделим AC пополам в точке D, и пусть $AE = AD$. Предположим, что наши движения происходят в лодке, движущейся влево со скоростью DA. Тогда ясно, что тело A, с точки зрения наблюдателя на берегу, двигалось до удара влево со скоростью DA, а после удара — вправо со скоростью



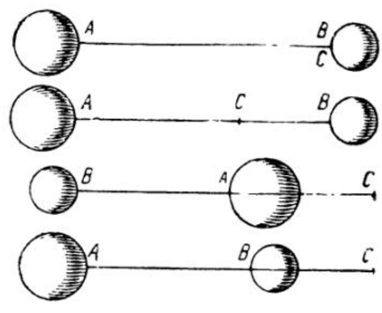
Фиг. 5.

DC, или AD, так как относительно лодки оно после удара будет двигаться вправо со скоростью AC, а лодка имеет скорость DA, направленную влево.

Таким образом, тело A, с точки зрения наблюдателя на берегу, сохраняет свою скорость до и после удара. Следовательно, и B, согласно гипотезе V, не должно ничего терять в скорости. Но до удара тело B двигалось относительно берега со скоростью BE вправо, так как в лодке B имело скорость BA вправо, а лодка — скорость DA или AE в обратную сторону. Следовательно, и после удара B должно двигаться относительно берега со скоростью BE, но влево. Движению вправо мешает более медленное движение тела A. Так как после удара B движется относительно берега влево со скоростью BE, а A вправо со скоростью AD или EA, то оба тела должны удаляться друг от друга со скоростью, составленной из BE и EA, т. е. со скоростью BA. Это будет справедливо не только относительно берега, но и относительно лодки, так как оба тела действительно удаляются друг от друга с этой скоростью.

То, что происходит с телами при столкновении в движущейся лодке, будет происходить таким же образом и вне лодки в любом другом месте.

После доказательства разобранного случая легко доказываются и все остальные. Остаются еще четыре возможности: или покоится меньшее тело, или оба тела движутся навстречу одно другому, или меньшее тело следует за бо́льшим с большей скоростью, или наоборот.



Фиг. 6.

Все эти случаи можно рассмотреть одновременно. Пусть, как и раньше, тело A больше тела B (фиг. 6) и движется со скоростью AC; B — или находится в покое, или движется со скоростью BC. Тела, двигающиеся таким образом, имеют относительную скорость AB.

Я утверждаю, что тела после удара разойдутся с той же относительной скоростью AB.

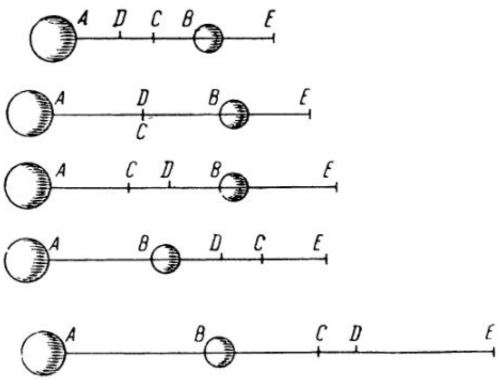
Предположим опять, что эти движения происходят в лодке, движущейся со скоростью CA, т. е. с той же скоростью, которой обладает тело A, но в обратную сторону. Тогда ясно, что относительно берега A неподвижно, а B во всех случаях столкнется с A со скоростью BA. A больше B. Таким образом, мы приходим к выше разобранному случаю, из которого следует, что тела относительно берега должны разойтись со скоростью AB. Следовательно, и относительно лодки и в действительности они отскакивают одно от другого с этой скоростью.

Предложение V

Если два тела, соударившись, повернутся для нового соударения с теми скоростями, которые они имели после

первого соударения, то после второго соударения каждое из них отскочит с той скоростью, которую имело до первого соударения.[15]

Предположим, что тело A двигалось со скоростью AC и тело B — со скоростью BC. С этими скоростями тела ударились одно о другое. После удара A отскочило со скоростью CD, а B — со скоростью CE (фиг. 7). Потом они снова оборачиваются для нового соударения с только что



Фиг. 7.

указанными скоростями, т. е. A со скоростью DC, а B со скоростью EC. Я утверждаю, что A теперь отскочит со скоростью CA и B — со скоростью CB, с которыми они двигались до первого соударения. Пусть все эти движения производятся на лодке, движущейся со скоростью AD. Пусть тела сближаются для второго соударения: A со скоростью DC и B со скоростью EC. Тогда для наблюдателя на берегу A имеет скорость AC (так как тело A движется относительно лодки со скоростью DC, а лодка со скоростью AD), а B имеет скорость BC. Второе видно из того, что $DE = AB$ (по предложению IV). Вычитая общий отрезок DB, получаем $BE = AD$. Итак, лодка движется со скоростью BE, а тело в лодке со скоростью EC. Следовательно, относительно берега скорость B будет, как сказано, BC. Таким образом, для наблюдателя на берегу A должно отскочить со скоростью CD, а B — со скоростью CE, так как мы с самого начала сделали предположение, что, если A до удара имеет скорость AC, а B — скорость BC, то они после удара отскакивают — A со скоростью CD, а B со скоростью CE. Если скорость A относительно берега есть CD, а скорость лодки AD, то скорость A относительно лодки есть CA. Равным образом, если скорость B относительно берега есть CE, а скорость лодки AD или BE, то скорость B относительно лодки есть CB.

Таким образом, тела, соударившиеся на лодке со скоростями DC и EC, отскакивают со скоростями CA и CB. Это должно быть верно повсюду, и теорема доказана.

Предложение VI

Когда два тела соударяются, то не всегда сохраняется количество движения, бывшее в обоих до удара, но оно может уменьшиться или увеличиться.[16]

Количество движения оценивается таким образом, что у неодинаковых тел, движущихся с одинаковой скоростью, количество движения тем больше, чем больше тело. У одинаковых тел, движущихся с разными скоростями, количество движения тем больше, чем больше скорость.

Фиг. 8.

Перейдем к доказательству теоремы. Пусть (фиг. 8) тело A больше B и пусть A находится в покое, а B движется со скоростью BA по направлению к A. Тело A придет в движение (согласно предложению III) и получит некоторую скорость AC. B отскочит со скоростью AD, причем общая скорость тел относительно друг друга должна равняться AB (предложение IV). Если бы тела A и B были равны, то количество движения было бы одинаково до и после удара, так все равно, двигаются ли два тела, равных B, со скоростями, соответственно AC и AD, или одно тело B со скоростью CD или AB.[17]

Но так как A больше B, то ясно, что после удара количество движения увеличилось, так как тело A обладает скоростью AC, а B — только скоростью AD, тогда как до удара вся скорость AB приходилась на B. Возможность уменьшения количества движения доказывается следующим образом. Если при ударе B со скоростью BA о неподвижное тело A A приобретет скорость AC, а B скорость AD, то, обратно, при ударе A со скоростью CA о тело B, имеющее скорость DA, A остановится, а B приобретет скорость AB (предложение V). При этом, согласно вышеизложенному, количество движения после удара уменьшится.

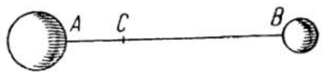
Предложение VII

Если большее тело соударяется с покоящимся меньшим, то оно сообщает ему меньшую скорость, чем удвоенную собственную.

Пусть тело A (фиг. 9) ударяется со скоростью AB о меньшее покоящееся тело B. Я утверждаю, что оно при ударе сообщит телу B скорость меньшую, чем удвоенная AB. Действительно, после удара тела должны удалиться друг от друга со скоростью AB (предложение IV). Следовательно, при скорости B, равной удвоенной AB, необходимо было бы, чтобы A при ударе сохранило всю свою скорость AB, что невозможно (по гипотезе IV); если бы скорость B была больше, чем удвоенная AB, то скорость A при ударе должна была бы возрасти, что также нелепо. Тем самым теорема доказана.

Фиг. 9.

Для одинаковых тел было для всех случаев показано, как каждое передает свое движение другому, если принять положение, что равные тела, соударяющиеся с равными скоростями, отскакивают с теми же равными скоростями. Подобным же образом могут быть разобраны все случаи для неодинаковых масс. Большинство случаев требует следующего предположения. Если сталкиваются два тела, скорости которых находятся в обратном отношении их величин, то каждое отскочит с той скоростью, какую оно имело от удара. Так, если A (фиг. 10) втрое больше B, а скорость BC в три раза больше AC, то после соударения в C каждое тело отскочит с той скоростью, с какой оно ударилось. Хотя это предположение не противоречит разуму и прекрасно соответствует экспериментам, но все же оно не так очевидно, как гипотезы относительно равных тел; поэтому мы подкрепим свое утверждение доказательством.



Фиг. 10.

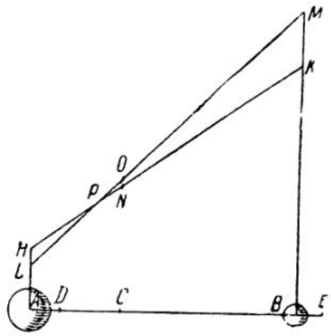
Для естественного ускоренного падения двух тяжелых тел установлено, что квадраты их максимальных (конечных) скоростей относятся, как высоты падения. Это показано Галилеем в третьем диалоге „О движении“ и подтверждено на бесконечном числе прекрасных экспериментов, так же как и то, что приобретенная при падении скорость может поднять тело снова на первоначальную высоту. Сверх того, доказательства обоих положений даны в моей книге о маятниковых часах. Исходя из этих положений, можно вывести указанную теорему.

Предложение VIII

Если сталкиваются два тела, движущиеся навстречу друг другу со скоростями, обратно пропорциональными их величинам,[18] *то каждое тело отскочит с той же скоростью с какой ударилось.*

Пусть (фиг. 11) сталкиваются тела A и B, из них A большее. Скорость тела B — BC относится к скорости тела A — AC, как величина тела A к величине тела B.[19] Надо доказать, что после соударения тела отскочат с теми же скоростями, с какими ударились, а именно, A — со скоростью CA, а B — со скоростью CB.

Доказано, что если A отскакивает со скоростью CA, то B отскочит со скоростью CB, так как иначе относительная скорость расхождения тел не была бы равна их относительной скорости сближения (предложение IV).



Фиг. 11.

Предположим сначала, что A отлетает не со скоростью CA, а, если это возможно, с меньшей скоростью CD; тогда B должно отлететь со скоростью CE, большей, чем скорость B до удара, так, чтобы $DE=AB$ (предложение IV). Предположим, что тело A приобрело свою прежнюю скорость AC, с которой оно стремилось к удару, путем падения с высоты AH (конечно, так, чтобы в конце падения, в точке A, вертикальная скорость превратилась в равную по величине горизонтальную скорость AC).[20] Предположим, что и B приобрело скорость BC путем падения с высоты KB. Следовательно, эти высоты относятся как квадраты конечных скоростей, т. е. $AC^2 : CB^2 = HA : KB$.

Если затем, после удара, тела A и B изменят свои горизонтальные скорости CD и CE на вертикальные восходящие,[21] то A подымется на высоту AL, такую, что $AL : AH = CD^2 : CA^2$. Ибо если AL и AH находятся в указанном соотношении, то, несомненно, тело, упавшее с высоты LA, приобретет скорость CD; следовательно, и наоборот — тело, обладающее скоростью CD, может подняться на высоту AL, как следует из указанных выше положений. С другой стороны, если тело B превратит свою скорость CE в вертикальную восходящую, то B достигнет высоты BM, такой, что $MB:KB=CE^2:CB$.[2]

Соединим H и K и L и M прямыми линиями. Эти линии непременно пересекутся, скажем, в P. Разделим обе линии в N и O в отношении величин тел B и A, т. е. так, чтобы AC относилось к CB, как HN к NK и как LO к OM. Следовательно, если центр тяжести тела A находится в H и центр тяжести тела B находится в K, то общий центр тяжести будет находиться в N. Но после падения тел из H и K и после того, как, соударившись, они вновь подымутся до L и M, их общий центр тяжести будет в O. А это невозможно, так как точка O лежит выше N, как мы сейчас покажем. В механике существует теорема совершенно несомненная, что никакое движение тел, вызванное силами тяжести, не может поднять центра тяжести выше первоначального положения.[22] Что точка O лежит выше N, доказывается следующим образом. По Эвклиду, книга 2-ая, предложение 4, имеем:

$$EC^2-BC^2=2CB\cdot BE+BE^2=(EC+CB)\,BE,$$

равным образом

$$AC^2-CD^2=(AC+CD)\,AD,$$

но

$$AD=BE, \text{ так как } AB=DE.$$

Следовательно,

$$(EC^2-BE^2):(AC^2-CD^2)=(EC+CB):(AC+CD).$$

Так как

$$(EC+CB)>2CB \text{ и } (AC+CD)<2AC,$$

то

$$(EC+CB):(AC+CD)>CB:CA,$$

также

$$(EC^2-BC^2):(AC^2-CD^2)>BC:CA,$$

но

$$EC^2:BC^2=MB:BK$$

или, вычитая по единице,

$$(EC^2 - BC^2) : BC^2 = MK : KB;$$

и так как

$$CB^2 : CA^2 = KB : HA,$$

и далее

$$CA^2 : CD^2 = HA : AL,$$

имеем

$$CA^2 : (CA^2 - CD^2) = HA : HL.$$

Отсюда следует

$$(EC^2 - CB^2) : (AC^2 - CD^2) = MK : HL$$

и, следовательно,

$$MK : HL > BC : CA,$$

но

$$MK : HL = MP : PL$$

и

$$BC : CA = MO : OL.$$

Это дает

$$MP : PL > MO : OL,$$

или, прибавляя с двух сторон по единице,

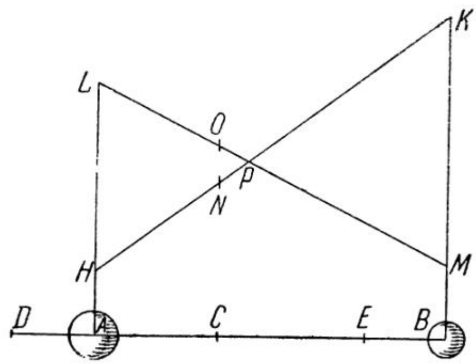
$$ML : PL > ML : OL,$$

значит $LO > LP$, т. е. O лежит между точкой пересечения P и M. Соединительная линия точек O и N параллельна вертикалям MB и HA, потому что в точках O и N прямые LM и HK делятся в том же отношении; так как M лежит выше K, то и O лежит выше N. Тем самым это последнее доказано.

Разберем теперь случаи, когда тело A отскакивает после удара со скоростью CD, большей, чем скорость CA, которой оно обладало до удара (фиг. 12), если это вообще возможно. Но CD будет меньше, чем CB, так как только при равенстве величин A и B A отскочило бы со скоростью CB (по предложению II).

B отскакивает со скоростью CE такой, чтобы $DE = AB$ (по предложению IV). В остальном мы проводим рассуждение и построение, как в предыдущем случае. При этом окажется, что L выше H, так как DC больше AC, и что M лежит ниже K, так как EC меньше CB. После этого доказывается так же, как в вышеизложенном случае, что

$$(DC^2 - CA^2):(BC^2 - CE^2) = (AC + CD):(EC + CB).$$



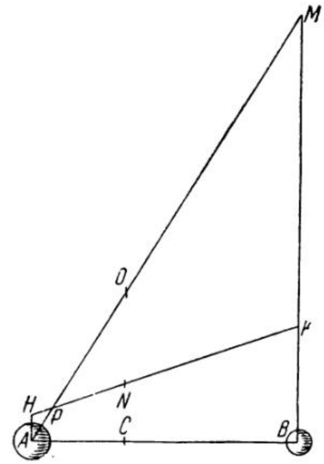
Фиг. 12.

Так как последняя сумма меньше $2CB$, а предыдущая больше $2AC$, то отношение $(AC + CD):(EC + CB)$ должно быть больше, чем $AC:CB$. Следовательно,

$$(DC^2 - CA^2):(BC^2 - CE^2) > AC:CB.$$

Далее можно опять доказать, что разности указанных квадратов относятся, как LH к KM. Следовательно, отношение LH к KM, а также LP к PM больше, чем AC к CB или LO к OM. Значит, точка O лежит между L и P. ON, так же как в первом случае, параллельно LH. Следовательно, как точка L лежит выше H, так и точка O лежит выше N, а это по причинам, указанным в предыдущем случае, нелепо.

Разберем третий случай. Предположим, что тело A после удара останавливается (фиг. 13). Тогда B отскакивает со скоростью AB (по предложению IV), так как до удара относительная скорость тела была AB. Предположим, как и раньше, что скорость BC приобретена падением с высоты KB. Тогда из соотношения $CB^2:AB^2=BK:KM$ определяется та высота BM, на которую может подняться тело B, если оно превратит свою горизонтальную скорость AB в вертикальную восходящую. Так как тело A после удара останавливается, то оно остается на линии AB. Если мы проведем линию AM и разделим ее в O так, что $AO:OM$, как $AC:CB$, то общий центр тяжести обоих тел поднимется до высоты O. Когда тела находились в точках H и K, из которых они, по предположению, упали, то их общий центр тяжести находился в точке N, определяемой из условия: HN относится к NK, как AC к CB. Если мы теперь покажем, что O лежит выше N, то мы будем иметь такое же, как и прежде, приведение к нелепости. Это делается следующим образом. Из соотношения $AB^2:BC^2=MB:BK$ путем вычитания единицы получаем



Фиг. 13.

$$(AB^2-BC^2):BC^2=MK:KB.$$

Далее, при наших предположениях мы, как в первом случае, имеем

$$BC^2:CA^2=KB:HA.$$

Следовательно,

$$(AB^2-BC^2):CA^2=MK:HA.$$

Так как левая часть равенства больше $BC:CA$, то и

$$MK:HA>BC:CA$$

или

$$MP:PA>MO:OA.$$

После прибавления единицы

$$MA:AP > MA:AO.$$

Значит $AP < AO$, откуда ясно, что O лежит между P и M. Но H выше, чем K; так как ON параллельно MK, то и O выше N, что и надлежало показать.

Разберем, наконец, случай, когда тело A продолжает после удара двигаться в том же направлении со скоростью CF (фиг. 14), тогда скорость CF, конечно, не будет больше AC; далее, B будет двигаться впереди со скоростью CG, превосходящей CF на $FG=AB$ (по предложению IV).

Фиг. 14.

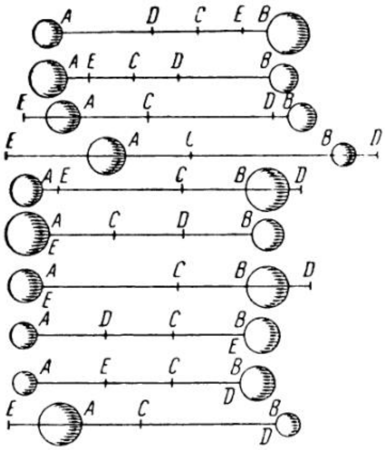
Невозможность этого устанавливается следующим образом. Отложим CD, равное CF, и DE, равное AB, тогда CE настолько же меньше ED, насколько CG больше того же ED или FG. Но ранее доказано, что телу B нельзя приписывать даже скорость CE, когда тело A отскакивает со скоростью CD, так как это привело бы к нелепости, а именно, к поднятию центра тяжести выше первоначального уровня при превращении горизонтальной скорости в вертикальную; тем более недопустимо приписывать телу B скорость CG, которая значительно больше CE, в то время как A имеет скорость CF, равную CD. Поэтому тело после удара не будет продолжать движения в ту же сторону.

Остается только допущение, что тело A отскакивает после удара с той же скоростью CA, с которой оно двигалось до удара, а следовательно, тело B отскакивает со скоростью CB, что и требовалось доказать.[23]

Предложение IX

Даны два неравных тела, соударяющихся прямым ударом, из которых движутся оба или одно, если другое в покое, и даны скорости обоих тел до удара или одного, если *другое покоится. Найти скорости обоих тел после удара.*[24]

Пусть тело A (рис. 15) движется вправо со скоростью AD. B движется или навстречу, или же в том же направлении со скоростью BD (или, наконец, находится в покое, так что точки B и D совпадают). Относительная скорость тел равна AB.



Фиг. 15.

Разделим AB в точке C так, чтобы отношение AC к CB было бы равно отношению величины B к A, и отложим CE, равное CD.

Я утверждаю, что после удара скорость точки A будет EA, а скорость точки B будет EB; при этом направление движения дается порядком точек AE, EB.

Если E совпадает с A, то тело A останавливается при ударе, если E совпадает с B, то останавливается тело B.

Если мы покажем верность этого положения на лодке, движущейся с постоянной скоростью, то мы можем с несомненностью утверждать, что явление будет протекать таким же образом и на берегу. Представим себе лодку, движущуюся вдоль берега; стоящий в лодке пассажир держит в своих руках F и P концы нитей, к которым подвешены шары A и B, и двигает их со скоростями AD и BD (относительно себя и лодки), так что они сталкиваются в D. В то же время лодка движется со скоростью DC в направлении от D к C. При этом окажется, что шар A, с точки зрения наблюдателя на берегу, будет двигаться вправо со скоростью AC, так как его скорость относительно лодки была AD, а шар B, имевший относительно лодки скорость BD, движется относительно берега со скоростью BC влево. Если наблюдатель на берегу возьмется своими руками H и K за руки пассажира F и G, а следовательно, и за концы нитей, с которых свешиваются шары A и B, то окажется, что в то время как пассажир в лодке сдвигает шары, со своей точки зрения, со скоростями AD и BD, человек на берегу, с точки зрения берега, сдвигает их со скоростями AC и BC.

Так как эти скорости находятся в обратном отношении величин тел, то для наблюдателя на берегу шары должны после удара отскочить с теми же скоростями CA и CB, как было показано выше. Но лодка смещается со скоростью DC или CE, причем направление движения лодки дается порядком точек C и B. Отсюда вытекает, что шар A движется относительно пассажира и лодки со скоростью EA в направлении, указываемом порядком точек E и A, а шар B, также относительно пассажира и лодки, со скоростью BE в направлении, указываемом порядком точек E и B. Если точка F совпадает с A или B, то очевидно, что тело A или тело B движется после удара с той же скоростью, как лодка, и в том же направлении; отсюда следует, что в этих случаях A или B соответственно находятся в покое, относительно лодки. Таким образом, мы показали, что тела A и B, двигавшиеся на лодке навстречу друг другу со скоростями AD и BD, движутся после удара на той же лодке со скоростями EA и BE в направлениях, указываемых порядком точек. Но то, что происходит в лодке, должно, как мы указали, происходить таким же образом и на неподвижной земле. Следовательно, наше утверждение правильно.

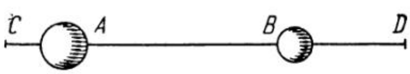
Из нашего построения можно вывести следующее правило для вычисления. Пусть оба наши тела движутся. Пусть отношение суммы величин двух тел к удвоенной величине B равно отношению относительной скорости двух тел к некоторой вспомогательной скорости C. Разность между этой скоростью C и скоростью A до удара дает скорость A после удара.[25] В одном случае, а именно, когда оба тела движутся в одном направлении и тело B догоняет тело A, надо брать не разность скоростей, а сумму. Если разность скоростей равна нулю, то тело A после удара останавливается.

Когда найдена скорость A, то известна и скорость B, так как относительная скорость тел должна остаться той же, что и до удара. Если тело A первоначально находилось в покое и двигалось только тело B по направлению к телу A, то скорость A после удара равна скорости C, определенной так, как выше указано. Отсюда выводится следующая теорема.

Предложение X

Скорость, которую большее тело сообщает меньшему, находящемуся в покое, относится к скорости, которую меньшее тело, движущееся с той же скоростью, сообщает неподвижному большему, как величина большего тела к величине меньшего.[26]

Предположим, что тело A больше тела B, и пусть покоящееся тело A получает от тела B, движущегося со скоростью BA, скорость AC (фиг. 16), а покоящееся тело B от тела A, движущегося со скоростью AB, — скорость BD. Я утверждаю, что BD относится к AC, как A к B по величине.



Фиг. 16.

Действительно: по теореме IX скорость BD относится к удвоенной AB, как тело A к сумме тел A и B; с другой стороны, сумма $(A+B)$ относится к B, как удвоенная скорость AB к скорости AC; отсюда скорость BD относится к скорости AC, как тело A к телу B, что и требовалось доказать.

Предложение XI

При соударении двух тел сумма произведений из их величин на квадраты их скоростей остается неизменной до и после удара; при этом отношения величин и скоростей должны быть выражены числами и отрезками.

Имеем два тела A и B, из которых A до удара имело скорость AD, а B — скорость BD. После удара скорость A, найденная согласно вышеприведенному построению, есть EA, а скорость B есть EB.

При построении AB было разделено в C таким образом, чтобы BC относилось к CA, как A к B. Затем было отложено CE, равное CD. Так как отношение величин A и B дается отношением BC к CA, то надо доказать, что[27]

$$CB \cdot AD^2 + CA \cdot BD^2 = CB \cdot EA^2 + CA \cdot BE^2.$$

Если даны четыре величины, из которых первая настолько больше второй, насколько третья больше четвертой, или наоборот, первая настолько меньше второй, насколько третья меньше четвертой, то, несомненно, сумма первой и четвертой величин равна сумме второй и третьей.

Поэтому наша теорема верна, если мы докажем, что

$$AD^2 \cdot CB - EA^2 \cdot CB = BE^2 \cdot CA - BD^2 \cdot CA.$$

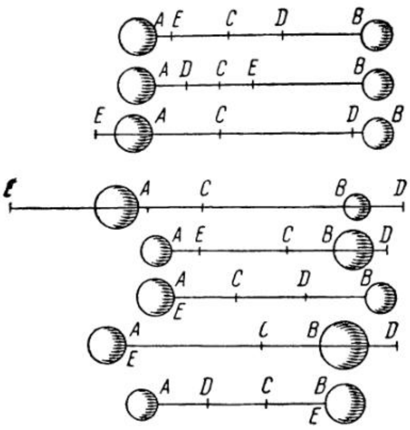
Доказательство этого равенства ведется следующим образом. Во всяком случае видно, что либо точка C окажется между A и D, либо точка D между A и C.

Если C лежит между A и D, то AD равно сумме $(AC + CD)$, а AE равно разности тех же величин, так как $CE = CD$; следовательно, AD всегда больше AE.

В этом случае BE равно сумме $(BC + CE)$ и BD равно разности тех же величин. Следовательно, BE всегда больше BD. Напротив, если D лежит между A и C, то AE равно $(AC + CE)$, а AD их разность. Значит AE больше AD, вместе с тем в этом случае BD больше BE. Таким образом, когда AD больше AE, то и BE больше BD; а когда AE больше AD, то и BD больше BE.

Далее, так как DE делится пополам в точке C, то при любом положении точки A разность квадратов AD^2 и AE^2 равна учетверенному прямоугольнику $AC \cdot CD$ или $AC \cdot CE$ (по Эвклиду, кн. II, теорема 8).

За отрезки, разделенные любым образом, приходится брать разные линии в разных случаях (фиг. 17). В первом и пятом случаях надо взять AC, разделенное в E, во втором и восьмом — отрезок AC, разделенный в D, в третьем и четвертом — отрезок EC, разделенный в A, в шестом и седьмом случаях, в которых исчезает квадрат AE, мы вместо $AD^2 - AE^2$ имеем AD^2, которое также равно $4AC \cdot CD$ или $4AC \cdot CE$. Опять-таки вследствие того, что DE делится пополам в C, всегда и при любом положении B разность $BE^2 - BD^2$ равна учетверенному прямоугольнику $BC \cdot CD$ или $BC \cdot CE$. Вследствие одинаковости высот $4BC \cdot CD$ относится к $4AC \cdot CD$, как BC к AC. Следовательно, $(BE^2 - BD^2)$ относится к $(AD^2 - AE^2)$, как BC к AC.



Фиг. 17.

Произведение из разности квадратов AD^2 и AE^2 на отрезок BC, или, что то же самое, разность произведений $AD^2 \cdot BC$ и $AE^2 \cdot BC$ равно произведению разности квадратов BE^2 и BD^2 на отрезок AC или разности произведений $BE^2 \cdot AC$ и $BD^2 \cdot AC$.

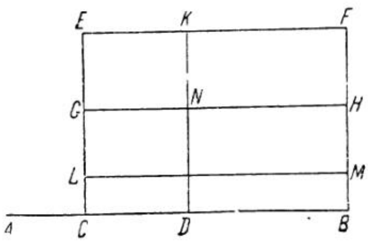
При этом всегда, когда AD^2 больше AE^2, также и BE^2 больше BD^2 и наоборот AD^2 меньше AE^2, BE^2 одновременно меньше BD^2. Отсюда ясно, что произведение $AD^2 \cdot BC$ всегда настолько больше или меньше $AE^2 \cdot BC$, насколько $BE^2 \cdot AC$ больше или меньше $BD^2 \cdot AC$, что и требовалось доказать.

Лемма I

Пусть прямая AB (фиг. 18) *разделена в* C *и* D *так, что* $AC < CD < BD$. *Я утверждаю, что прямоугольник* $AD \cdot CB$ *меньше удвоенной суммы прямоугольников* $AC \cdot CD + CD \cdot DB$.[28]

Над отрезком CD строим квадрат CN и продолжаем CG до E, так что GE равно AC. Далее строим прямоугольник CF и продолжаем DN до K и GN до H.

Так как CG равно CD и GE равно AC, то CE равно AD. Следовательно, прямоугольник $CF = AD \cdot CB$.



Фиг. 18.

Прямоугольник EN равен $AC \cdot CD$; прямоугольник $NB = CD \cdot DB$. Требуется доказать, что прямоугольник CF меньше удвоенной суммы прямоугольников EN и NB.

Берем GL, равное GE, и проводим LM параллельно AB. Линия LM ляжет между GH и CB, так как GL, равное GE, по условию меньше CD. Прямоугольник LD меньше прямоугольника DM, так как CD меньше DB. Прямоугольник LN равен прямоугольнику NE и прямоугольник NM равен прямоугольнику NF. Поэтому сумма прямоугольников LN и NF равна сумме прямоугольников EN и NM.

Если теперь к равным суммам прибавить неравные величины, то должны получиться величины неравные, а именно, сумма прямоугольников LN, NF и LD должна быть меньше суммы прямоугольников EN, NM и DM.

Сумму прямоугольников $(LN + NF + LD)$ можно заменить через $CN + NF$, а сумму прямоугольников $(EN + NM + DM)$ через $NB + NE$.

Итак, $CN + NF < NB + NE$. Прибавляем к правой и левой части неравенства по $NB + NE$ и замечаем, что $CN + NF + NB + NE = CF$. Мы получаем

$$CF < 2(NB + NE),$$

что и требовалось доказать.

Лемма II

Пусть прямые AB, AC и AD (фиг. 19) представляют три пропорциональных величины,[29] из них AB — наибольшая. Прибавим ко всем длинам одинаковую длину AE.

Я утверждаю, что площадь прямоугольника, построенного на сторонах BE и DE, больше квадрата CE^2.

Фиг. 19.

Из пропорции $AB : AC = AC : AD$ следует

$$(AB - AC):(AC - AD) = BC : CD = AB : AC = AC : AD.$$

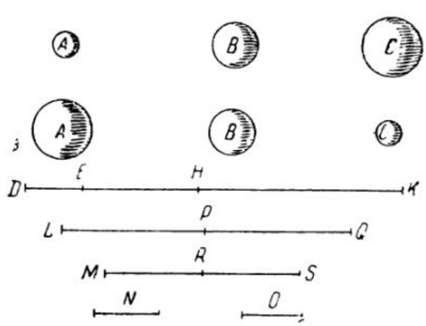
Но отношение $\frac{CA}{AD}$ больше $\frac{CE}{ED}$, а значит $\frac{BC}{CD} > \frac{CE}{ED}$; переставляем внутренние члены $\frac{BC}{CE} > \frac{CD}{ED}$; прибавляем по единице $\frac{BC + CE}{CE} > \frac{CD + ED}{ED}$, отсюда $\frac{BE}{CE} > \frac{CE}{ED}$, или $BE \cdot ED > CE^2$.

Предложение XII

Если одно тело A движется по направлению к другому C, большему или меньшему, находящемуся в покое, то оно сообщит ему бо́льшую скорость, чем при непосредственном

ударе, если между телами A и C включить еще тело B средней величины, также в состоянии покоя. Наибольшую скорость тело сообщит тогда, когда включенное третье тело является средним пропорциональным между крайними.[30]

Пусть тело A (фиг. 20) движется по направлению к неподвижному телу C. Пусть A больше или меньше C и пусть между ними находится неподвижное тело B средней величины, так что A сначала приводит в движение тело B, а B потом приводит в движение C.



Фиг. 20.

Я утверждаю, что таким образом тело C получит бо́льшую скорость, чем при непосредственном ударе тела A. Пусть длины DE, EH и HK взяты в том же отношении, как и тела A, B, C. Пусть LP — скорость тела A, LQ — удвоенное LP. Если сумма $(DE+EH)$ относится к DE так, как LQ относится к MR, то MR есть скорость, приобретенная телом B после удара тела A (по предложению IX). Пусть MS есть удвоенное MR. Если сумма $(EH+HK)$ относится к EH, как MS к N, то N будет скоростью тела C после соударения с B, движущимся со скоростью MR (по теореме IX). Наконец, если сумма $(DE+HK)$ относится к DE так, как LQ к O, то O есть скорость, приобретаемая телом C при непосредственном ударе тела A, со скоростью LP. Надо доказать, что N больше O.

Мы имеем

$$LQ:N=(LQ:MR)(MR:N).$$

Далее

$$LQ:MR=HD:DE;\; MR:N=KE:2EH,$$

ибо $KE:EH=SM:N$, следовательно,

$$KE:2EH=SM:2N=RM:N.$$

Следовательно,

$$LQ:N=(HD:DE)(KE:2EH)=HD\cdot KE:2DE\cdot KH,$$

равным образом

$$LQ:O=(DE+HK):DE=(2DE\cdot EH+2EH\cdot KH):2DE\cdot EH,$$

но по лемме I

$$HD\cdot KE<2DE\cdot EH+2EH\cdot HK,$$

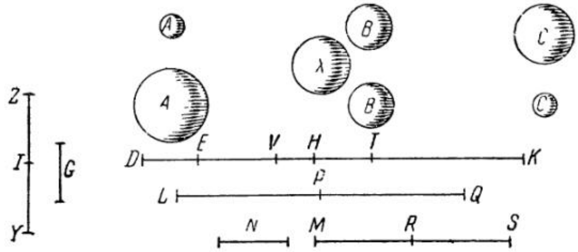
следовательно,

$$LQ:N<LQ:O$$

и окончательно

$$N>O.$$

Пусть теперь тело B является средним пропорциональным между телами A и C. Я утверждаю, что в этом случае телу C сообщается наибольшая из возможных скоростей.



Фиг. 21.

Включим сначала вместо B большее тело X (фиг. 21), так что A ударяет в X, а X — в C, и попытаемся утверждать, если это возможно, что тело C получит теперь бо́льшую скорость, чем от B.

Пусть $A:X=DE:ET$. Тогда ET больше EH, если отрезки DE, EH, HK соответствуют величинам тел A, B, C, т. е. если EH — средняя пропорциональная между DE и HK. Пусть VE будет третьей пропорциональной к TE и HE.

Найдем теперь, как это сделано выше, при помощи теоремы IX скорость N, приобретаемую телом C при включении промежуточного тела B. Подобным же образом получим для тела C скорость G, соответствующую включению тела X.

Если сумма $(A+X)$ относится к A или, что то же, $(DE+ET)$ относится к DE, как LQ к IY, то IY есть скорость X, сообщенная ему телом A; далее, если отношение $(X+C)$ к X, или отношение $(ET+HK)$ к ET равно отношению $2IY$, т. е. ZY, к G, то G есть скорость тела C, приобретенная при ударе тела X.

Мы должны доказать, что N больше G. Мы имеем, как и раньше,

$$LQ:N=(HD:DE)(KE:2HE),$$

но теперь

$$KE:2HE=HD:2ED,$$

так как KH, HE, ED составляют прогрессию. Следовательно,

$$LQ:N=HD^2:2DE^2.$$

Далее

$$LQ:G=(LG:YI)(YI:G).$$

Но

$$LQ:IY=TD:DE;\ \text{а}\ IY:G=(KH+TE):2TE,$$

так как по построению

$$(KH+TE):TE=ZY:G,$$

и, следовательно,

$$(HK+TE):2TE=ZY:2G=IY:G;$$

и мы получаем

$$LQ:G=(TD:DE)[(KH+TE):2TE].$$

То обстоятельство, что DE, EH, HK составляют геометрическую прогрессию, так же как EV, EH, ET, приводит к равенствам

$$DE \cdot HK = EH^2 \text{ и } EV \cdot ET = EH^2.$$

Следовательно, $DE \cdot HK = EV \cdot ET$, или

$$VE : ED = HK : ET;$$

прибавляем по единице:

$$VD : ED = (KH + ET) : ET$$

и

$$VD : 2ED = (KH + ET) : 2ET,$$

отсюда

$$LQ : G = (TD : DE)\,(VD : 2DE) = TD \cdot VD : 2DE^2,$$

с другой стороны,

$$LQ : N = HD^2 : 2DE^2.$$

Но по лемме II $TD \cdot YD > HD^2$, так как TE, HE, VE составляют пропорциональный ряд и ко всем членам прибавлено ED; следовательно,

$$LQ : G > LQ : N,$$

т. е.

$$N > G,$$

что и требовалось доказать.

Теперь предположим, что между A и C включено тело X меньшей величины, чем B (фиг. 22), и попытаемся утверждать, что от этого возрастет скорость тела C. Пусть $A : X = DE : ET$, так как мы приняли X меньше B, то и ET меньше EH ибо EH относится к DE, как B к A.

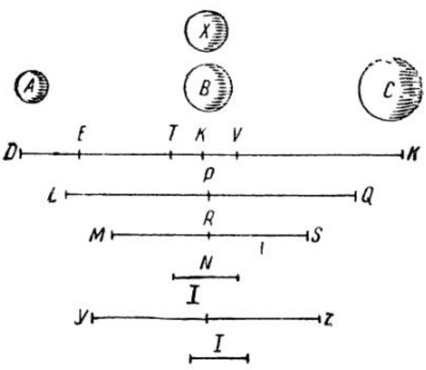
В остальном надо повторить то же построение и то же доказательство, как и выше, и опять получится, что $N > G$.

Итак, установлено, что покоящееся тело C получает наибольшую скорость при включении такого промежуточного тела B, которое является средним пропорциональным между A и C.

Предложение XIII

Покоящееся тело получает от движущегося, неравного ему тела тем больше движения, чем больше промежуточных тел включено между двумя данными телами. При данном числе промежуточных тел наилучшая передача движения достигается в том случае, если включенные тела составляют вместе с крайними телами геометрическую прогрессию.[31]

Пусть тела A, B, C — составляют прогрессию, т. е. $A:B=B:C$; из них A движется, B и C стоят.



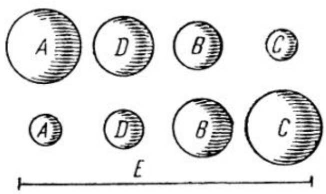
Фиг. 22.

Тогда наибольшая скорость, которую можно сообщить C включением одного тела, будет достигаться включением тела B (по предложению XII).

Что включение двух промежуточных тел может дать еще большее движение, ясно из следующего. Если между A и B включить тело D, являющееся средней пропорциональной между A и B, то B приобретет бо́льшую скорость, чем при непосредственном воздействии A, а чем больше скорость B, тем большее движение сообщится C. Следовательно, движение C увеличивается от включения двух тел D и B

вместо одного тела B. Если теперь на место B включить другое тело, среднее пропорциональное между D и C, то C получит еще большее движение, чем от D и B. Что наибольшее движение для крайнего тела при включении двух тел будет достигнуто тогда, когда A, D, B, C, составят геометрическую прогрессию, доказывается следующим образом.

Прежде всего ясно, что нельзя довести скорости C включением двух тел до произвольной величины, так как скорость D всегда меньше, чем удвоенная скорость A,



Фиг. 23.

скорость B всегда меньше, чем удвоенная скорость D, и скорость C всегда меньше, чем удвоенная скорость B, и следовательно, меньше, чем увеличенная в 8 раз скорость A. Отсюда видно, что есть предельная скорость для тела C. Пусть предельная скорость E достигается при включении тел D и B между A и C. Я утверждаю, что она достигается тогда, когда A, D, B, C образуют геометрическую прогрессию.

Действительно, если бы A, D, B не составляли прогрессии, то, заменив D телом, являющимся средним пропорциональным между A и B, можно было бы увеличить скорость B, а следовательно, и C. При этом C получило бы скорость бо́льшую E, что нелепо, так как было предположено, что E — наибольшая скорость, которой может достичь C при включении двух тел. Соответственно, если D, B, C не составляют прогрессии, то, заменив B средним пропорциональным между D и C, можно было бы увеличить скорость C, что привело бы к той же нелепости. Следовательно, как A, D, B, так и D, B, C составляют прогрессии, и A, D, B, C составляют единую геометрическую прогрессию, что и требовалось доказать.

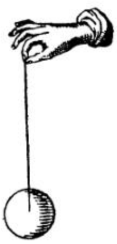
Далее подобным же рассуждением можно показать, что включением трех промежуточных тел можно сообщить телу C бо́льшую скорость, чем при включении только двух тел и т. д. Затем можно показать, что тело C получает наибольшую скорость в том случае, если все тела составляют единую геометрическую прогрессию. Следовательно, предложение доказано.

Если дан ряд из ста тел, причем отношение величин каждых двух последовательных тел есть два к одному, то расчет, произведенный согласно правилу, указанному в предложении IX приводит к следующему результату. Если движение начинается с самого большого тела, то скорость самого малого будет находиться к скорости самого большого в отношении 14 760 000 000 : 1. Если же движение начинается с самого малого, то количество движения возрастает в целом в отношении 1 : 4 677 000 000 000.[32]

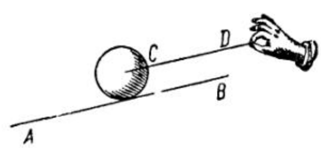
О ЦЕНТРОБЕЖНОЙ СИЛЕ

Тяжесть есть стремление к падению, к движению вниз. Если принять, что движение весомых тел при падении по вертикали или по наклонным плоскостям происходит так, что их скорость увеличивается на равные величины в равные времена, то можно строго доказать, что пути, проходимые от начала движения в разное время, относятся, как квадраты этих времен. Это прекрасно согласуется с опытом. Отсюда следует справедливость нашего предположения. Опыты Галилея, Риччиоли и мои дают согласные результаты, если учесть малое отклонение, зависящее от сопротивления воздуха, и притом тем меньшее, чем тяжелее тело по сравнению с размерами его поверхности и чем меньше пространство, в котором наблюдается движение. Поэтому вполне правдоподобно, что при отсутствии сопротивления воздуха можно было бы подтвердить закон и при падении со значительной высоты. Мы знаем, что пробковый шар благодаря сопротивлению воздуха вскоре начинает падать с постоянной скоростью. То же должно произойти и со свинцовым шаром, если уменьшить его размеры настолько, чтобы его поверхность относилась к его весу так же, как у пробкового шара. Для этого нужно, чтобы поперечник свинцового шара относился к поперечнику пробкового шара, как удельный вес пробки к удельному весу свинца. Это я показал по другому случаю. Я думаю, что и любых размеров свинцовый шар при падении в воздухе, в конце концов, достигнет постоянной скорости, правда, пролетев громадное расстояние. Закон ускоренного движения оказался бы неприемлемым. Следовательно, строго говоря, он никогда в точности не соблюдается. Все-таки рассуждения Галилея об этом движении остаются превосходными и полезными; они во всяком случае не уступают всей механике весомых тел, в которой ведь принимается, что весомые тела падают по параллельным линиям, в то время как эти линии сходятся к центру земли. Впрочем, нам для доказательства тех теорем, с которыми мы будем иметь дело достаточно, что на произвольно малом участке ускорение[1] растет, считая от точки покоя, как ряд нечетных чисел, как установил Галилей.

Таким образом, когда весомое тело подвешено на нити (фиг. 1), то нить испытывает натяжение, так как тело стремится удалиться в направлении нити и притом ускоренно, в согласии с вышеприведенным законом. Но при ускоренном движении, происходящем по указанной прогрессии, тела могут проходить в равные времена различные расстояния, например в случае, если тело, находящееся на наклонной плоскости AB подвешено к нити CD, параллельной наклонной плоскости AB (фиг. 2). И в этом случае тело стремится ускоренно двигаться в направлении DC, но не таким образом, чтобы в некоторый определенный промежуток времени пройти тот путь, который оно прошло бы, если бы было отпущено с вертикальной нити. Поэтому теперь и натяжение нити меньше; тем меньше, чем меньше путь, пройденный вдоль наклонной плоскости, по отношению к пути, пройденному в то же время по вертикали.



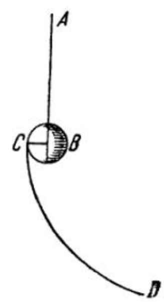
Фиг. 1.



Фиг. 2.

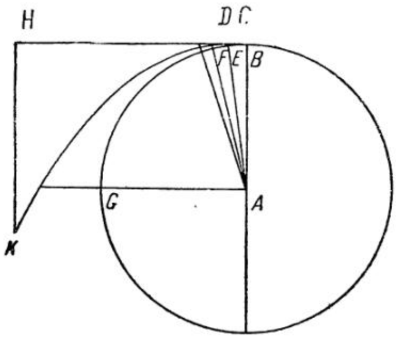
Если два равных груза, висящих на нитях, стремятся удалиться в направлении нити тем же ускоренным движением и так, что в одинаковые времена будут проходить одинаковые пути, то мы будем испытывать одинаковые натяжения нитей вниз или вверх или куда бы ни было направлено натяжение. При этом безразлично, откуда берется это стремление, лишь бы оно существовало. Но такое стремление существует, если тело, будучи отпущено, т. е. не испытывая противодействия, будет совершать движения указанного характера. Надо притом рассматривать только начало движения, ограничиваясь сколь угодно малым промежутком времени.

Если, например (фиг. 3), шар B висит на нити AB и сбоку касается вогнутой поверхности CD в точке такой, что линия, соединяющая точку касания с центром шара, перпендикулярна как к нити, так и к касательной к вогнутой поверхности, то мы знаем, что поверхность не поддерживает шара и натяжение нити то же, как если бы кривой поверхности не было. Однако, если отрезать нить, то тело будет падать вдоль кривой поверхности не так, как при свободном падении, и даже не будет соблюден в точности закон нечетных чисел 1, 3, 5, 7. Поэтому, если мы хотим изучить это стремление к движению, то нам не нужно рассматривать, что произойдет с телом, некоторое время спустя после отделения от нити, а надо рассмотреть возможно меньший промежуток времени, начиная от начала движения. А шар B при отделении от нити начнет двигаться совсем так, как при вертикальном падении, так как в начале движения направление его будет по линии AB, параллельной касательной к кривой поверхности в C. Рассмотрим теперь, какое и с какой силой стремление удалиться от центра имеют тела, прикрепленные к вращающейся нити или колесу.



Фиг. 3.

Пусть колесо BG (фиг. 4)[2] движется в горизонтальной плоскости около центра A; прикрепленный к периферии шарик, пришедший в B, имеет стремление продолжать свое движение по прямой BH, касательной к колесу. В этом направлении шарик начал бы двигаться, если бы освободился от колеса. Шарик продолжал бы это движение неизменно, если только не будет отклонен вниз силой тяжести или же если его движению не воспрепятствует столкновение с другим телом. На первый взгляд трудно понять, почему тогда существует натяжение нити AB, если тело B, стремится двигаться по прямой BH, перпендикулярной длине нити. Но все объясняется следующим образом. Представим себе это колесо достаточно большим, таким, что бы оно легко могло увлечь с собой человека, стоящего на окружности и, конечно, прикрепленного в B так, чтобы его не могло выбросить с колеса. Пусть этот человек держит в руке нить со свинцовым грузом на конце. Благодаря вращению нить будет натянута таким же образом и с одинаковой силой, будет ли она удерживаться в руке или продолжена до центра A и там закреплена. Причину натяжения нити мы теперь легче поймем. Возьмем равные дуги BE и EF, малые по сравнению с величиной окружности, например в сотую долю окружности или еще меньше. Эти дуги человек на колесе пройдет в одинаковые времена. А свинец, если бы его освободить, в те же времена прошел бы по касательной равные этим дугам длины BC и CD. Правда, точки C и D придутся не на продолжение AE и AF, а немного правее, ближе к B. Теперь ясно, что свинец, будучи свободен, находился бы в C, когда человек придет в E, и в D, — когда человек придет в F. Отсюда мы по праву говорим об этом стремлении у свинца.

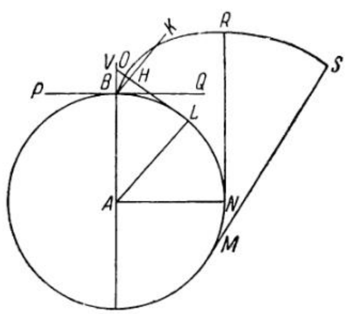


Фиг. 4.

Если бы точки C, D лежали на продолжении прямых

AE и AF, то свинец стремился бы удалиться от человека по линии, идущей от центра через человека, причем в первом промежутке времени он удалился бы на EC, во втором,— на FD, и т. д. Эти расстояния растут, как ряд квадратов, начиная с единицы: 1, 4, 9, 16, и т. д. Это соответствие ряду будет тем точнее, чем короче дуги BE и EF.

Поэтому можно считать, что в самом начале движения этих отступлений от ряда не будет. Следовательно, это стремление совершенно подобно тому, которое мы чувствуем, когда держим шарик за нить, так как шарик тоже стремится удалиться в направлении нити таким же ускоренным движением, так что в конце первого промежутка времени тело пройдет малое расстояние 1, в конце второго промежутка 4 таких малых расстояния, в конце третьего — 9 малых расстояний, и т. д.



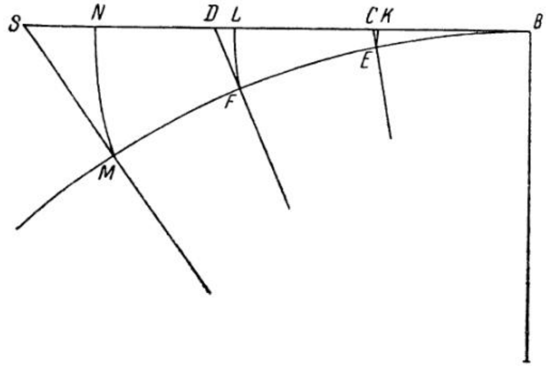
Фиг. 5.

Так обстояло бы дело, если бы C и D лежали бы на продолжении AE и AF. Отступление точек C и D немного в сторону B приводит к тому, что шар отлетает от человека не по продолжению радиуса, а по особой кривой, которая касается радиуса в точке B (фиг. 5). Действительно, если закрепить в B касательную плоскость PQ, которая будет продолжать вращаться с окружностью, то шар B, если он освободится от колеса и плоскости PQ, опишет относительно плоскости и точки B, продолжающих вращаться, кривую BRS, касающуюся продолжения также вращающегося радиуса AB и B. Для построения этой кривой достаточно обвязать нить вокруг BNM и вести конец B направо так, чтобы часть, не прилегающая к колесу, была натянута. При этом движении нить концом B опишет упомянутую линию, как легко доказать. Эта линия имеет следующее свойство. Если провести касательную к любой точке периферии колеса, например N, то отрезок касательной, от точки касания до пересечения с кривой, например NR, равен дуге NB, как легко видеть из построения. Надо доказать, что наша кривая и прямая AB касаются в точке B.

Пусть NR — касательная к окружности, параллельная AB. Несомненно, что участок кривой BR весь лежит между AB и NR. Возьмем любую точку на этом участке кривой, например O, и проведем через нее касательную VOL; мы имеем $LO = BL$ и, следовательно, меньше, чем LV, тангенс той же дуги. Поэтому точка O непременно лежит между V и L. Это же построение может быть применено к любой точке кривой.

Попытаемся теперь утверждать, что прямая BV не касается кривой BR в B; тогда из B можно было бы провести прямую BK под таким малым углом к BV, чтобы не пересечь кривой BR. Проводим радиус AL параллельно BK. Пусть LH перпендикулярно к BK и, следовательно, также к AL. Тогда LH равно синусу дуги BL и, следовательно, меньше этой дуги. Но отрезок прямой LHO между точкой касания и нашей кривой равен дуге BL. Следовательно, часть кривой BR, на которой лежит точка O, окажется внутри угла VBK, как бы мал он ни был. Отсюда следует, что прямая BK пересекает кривую и что поэтому BN касается кривой в точке B.

Так как шарик, увлекаемый окружностью, стремится описать кривую, имеющую в B касательную, совпадающую с радиусом и его продолжением, то ясно, что вследствие этого стремления нить натянута так, как будто бы шар стремился двигаться по продолжению радиуса. Пути, которые шарик прошел бы по упомянутой кривой в равномерно нарастающие промежутки времени относятся, как квадраты чисел, начиная с единицы, 1, 4, 9, 16, и т. д., если рассматривать начало движения и совсем малые пути, как видно из фиг. 6. Равные дуги здесь BE, EF, FM и на касательной BS равные дугам отрезки BK, KL, LN; от центра идут прямые EC, FD и MS. Если бы шар оторвался в B, то он был бы в K, когда точка B оказалась в E, и, следовательно, прошел бы часть EK кривой; к концу второго малого промежутка времени, когда точка B оказалась бы в F, шар был бы в L и прошел часть LF кривой, и т. д. Эти части кривой при начале движения можно считать совпадающими с EC, FD MS, и т. д., которых они касаются, так как



Фиг. 6.

можно взять столь малые дуги, начиная от точки B, что отношение ничтожной разности длин прямых и кривых к этим длинам будет меньше всякого вообразимого отношения. Поэтому надо считать расстояния EK, FL и MN, как растущие по закону квадратов чисел, начиная с единицы, 1, 4, 9, 16, и, таким образом, стремление, которым обладает шар, находящийся на вращающемся колесе, не что иное, как стремление двигаться по продолжению радиуса, ускоренным движением проходя в равные времена пространства, растущие, как 1, 3, 5, 7, и т. д.

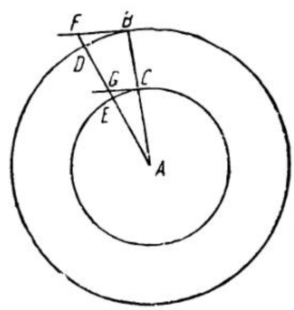
Достаточно, чтобы эта прогрессия осуществлялась бы в самом начале движения по кривой. Потом шар может двигаться по какому угодно другому закону, что не имеет отношения к стремлению, существующему до начала движения. Указанное стремление совершенно сходно с тем стремлением, с каким подвешенные весомые тела стремятся двигаться вниз.

Отсюда мы заключаем, что центробежные силы разных тел, движущихся по одинаковым кругам с одинаковой скоростью, относятся друг к другу, как веса тел или как количества материи. Как все весомые тела стремятся падать вниз с одинаковой скоростью и одинаковым ускоренным движением, и притом это стремление обладает тем большей силой, чем они больше, так должно быть и с теми телами, которые стремятся удалиться от центра, так как их стремление, как мы показали, совершенно подобно тому, которое происходит от тяготения. Но в то время как стремление падать у одного и того же шара всегда одно и то же, всякий раз, когда он подвешен на пути, центробежное стремление — разное, в зависимости от скорости вращения. Остается еще исследовать величину стремления в зависимости от скорости. Сначала мы определим, с какой скоростью надо вращать колесо, чтобы натяжение нити шаром было бы такое же, какое получается при подвешивании того же шара на нити.

Предложение I

Если два одинаковых тела описывают в одинаковое время неодинаковые окружности, то отношение центробежной силы на большем круге к центробежной силе на меньшем равно отношению диаметров или самих окружностей.[3]

Даны (фиг. 7) две окружности с радиусами AB, AC, по которым в одинаковое время совершают оборот два одинаковых тела. Возьмем на двух окружностях две очень маленькие подобные дуги BD и CE. Отложим на касательных, проведенных в B и C, отрезки BF и CG, равные, соответственно, BD и CE. Тело, вращающееся на круге BD, имеет стремление удалиться от центра в направлении продолжения радиуса равномерно ускоренным движением и при этом движении в определенный промежуток времени пройти путь DF; в свою очередь тело, вращающееся по дуге CE, имеет также стремление удалиться от центра и так, чтобы за то же время пройти путь GE. Таким образом, во сколько раз отрезок DF больше отрезка EG, во столько раз натяжение нити у большой окружности больше, чем у малой. Ясно, что $FD:GE=BF:CG$, т. е. как $AB:AC$. Следовательно, центробежная сила на большей окружности во столько раз больше центробежной силы на меньшей окружности, во сколько длина окружности или диаметр большего круга больше диаметра или длины окружности меньшего круга.



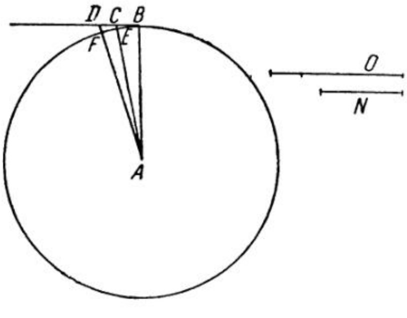
Фиг. 7.

Предложение II

Если два равных тела вращаются на одинаковых кругах или колесах с разными скоростями, но оба равномерным движением, то сила удаления от центра у более быстрого тела относится к силе более медленного, как квадраты их скоростей. Это значит: если протянуть нити от центра вниз и подвесить гири, как раз уравновешивающие центробежную силу, то эти гири будут относиться друг к другу, как квадраты скоростей.

На круге с центром A и радиусом AB (фиг. 8) вращаются два одинаковых тела, сначала одно с большей скоростью, потом другое с меньшей скоростью. Скорости представлены отрезками O и N.

Возьмем две очень маленькие дуги, BE и BF, такие, что $BE:BF=N:O$, тогда несомненно, что более медленное тело пройдет дугу BE, в то время как более быстрое пройдет дугу BF. Отложим на касательной BD отрезок BC, равный BE, и отрезок BD, равный BF. Итак, установлено, что каждое из двух тел имеет стремление удалиться от центра ускоренным движением и притом так, что более медленное тело стремится удалиться от окружности на расстояние EC и более быстрое в то же время — на FD. Более быстрое тело тянет с большей силой, чем тело более медленное, в отношении $DF:EC$. Так как мы взяли очень малые дуги, то отношение $DF:EC$ равно отношению $DB^2:CB^2$, как мы раньше разъяснили. Но $DB:BC=FB:BE=O:N$, следовательно, $FD:EC=O^2:N^2$, и в таком же отношении находятся центробежные силы более быстрого и более медленного тела, что и требовалось доказать.

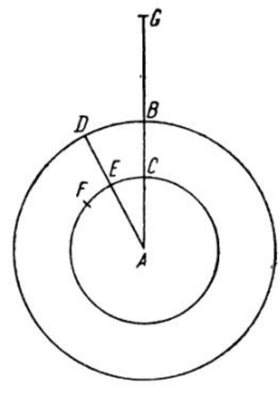


Фиг. 8.

Предложение III

Если два одинаковых тела движутся по неодинаковым кругам с одинаковой скоростью, то их центробежные силы находятся в обратном отношении их диаметров, так что на меньшем круге указанная сила больше.

Пусть неравные круги с радиусами AB и AC (фиг. 9) имеют общий центр в A. На окружностях вращаются два тела с одинаковой скоростью. В то время, в которое на большей окружности пробегается дуга BD, на меньшей окружности пробегается дуга CF, равная по длине BD. Я утверждаю, что центробежная сила тела, движущегося по окружности BD, относится к центробежной силе тела, движущегося по кругу CF, как AC к AB. Проводим радиус AD, пересекающий малый круг в точке E; пусть также AG есть третья пропорциональная к AC и AB. Далее вообразим себе тело, равное каждому из наших тел, вращающееся на круге CF с такой скоростью, что оно проходит дугу CE в то время, как два других тела проходят дуги BD и CF. Следовательно, скорость воображаемого тела относится к скорости наших тел как CE к BD, т. е. как AC к AB. Но по предложению I центробежная сила тела, пробегающего дугу BD, относится к центробежной силе воображаемого тела, как BA к AC; а по предложению II центробежная сила воображаемого тела относится к центробежной силе тела, пробегающего дугу CF, как $AC^2 : AB^2$, т. е. как AC к AG, так как мы показали, что их скорости относятся, как $AC : AB$.



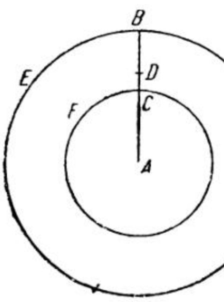
Фиг. 9.

Комбинируя обе пропорции, мы найдем, что центробежная сила тела, проходящего дугу BD, относится к центробежной силе тела, проходящего равную дугу CF, как BA к AG, т. е. как $AC : AB$, что требовалось доказать.

Предложение IV

Если два равных тела, вращающихся на неравных окружностях, имеют одинаковую центробежную силу, то время обращения на большой окружности относится ко времени обращения на меньшей, как корни квадратные их диаметров.

Даны два неравных круга с общим центром A (фиг. 10). Их радиусы суть AB и AC. Пусть на каждом круге вращается тело таким образом, что их центробежные силы равны. Я утверждаю: время, в течение которого проходится окружность BE, относится ко времени обращения по окружности CF, как корень квадратный из AB к корню квадратному из AC, т. е. как $BA:AD$, где AD — средняя пропорциональная между AB и AC. Представим себе третье одинаковое тело, которое совершает оборот по CF в то же время, как одно из двух тел совершает оборот по BE, тогда центробежная сила воображаемого тела относится к центробежной силе последнего тела, как $AC:AB$ (по предложению I), но центробежные силы первых двух тел равны, по предположению, следовательно, центробежная сила воображаемого тела относится к центробежной силе тела, движущегося по окружности CF, как $AC:AB$. Но центробежные силы тел, движущихся по одной окружности, относятся, как квадраты скоростей (по предложению II). Следовательно, скорость воображаемого тела относится к скорости тела, движущегося по окружности CF, как $AC:AD$ или как $AD:AB$. Но отношение скоростей есть обратное отношение времен обращения по той же окружности, следовательно, время обращения воображаемого тела, равное, по предположению, времени обращения тела по окружности BE, относится ко времени обращения тела, обращающегося по кругу CF, как $AB:AD$, что и требовалось доказать.

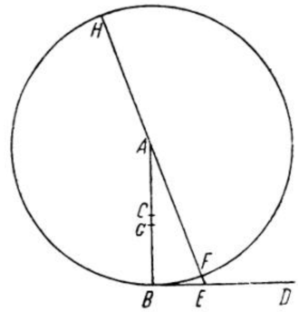


Фиг. 10.

Предложение V

Если тело движется по кругу с той скоростью, которую оно приобретает при падении с четвертой части поперечника, то оно обладает стремлением удалиться от центра равным тяжести, т. е. оно тянет нить с той же силой, как если бы было к ней подвешено.[4]

Круг (фиг. 11) с центром A и радиусом AB расположен горизонтально. По нему обращается тело равномерно со скоростью, соответствующей падению с высоты $CB = \frac{AB}{2}$. Я утверждаю, что нить, удерживающая тело, будет натянута так, как будто бы тело свободно висело на нити. Пусть касательная к кругу BD равна AB. Тело движется по окружности с той скоростью, которую оно приобретает при падении с высоты CB, т. е. со скоростью, с которой оно, двигаясь равномерно, в течение того же вращения, в какое оно падает с высоты CB, прошло бы путь $2CB$. Следовательно, если освободить тело в B, то оно за время падения пройдет по касательной отрезок $BD = AB$. Возьмем на BD чрезвычайно малый отрезок BE и проведем через центр прямую EAH, которая пересечет окружность в F.



Фиг. 11.

Далее, пусть DB^2 относится к BE^2, как BC к CG по длине. Если мы время падения вдоль CB ускоренным движением изобразим отрезком DB, то BE изобразит время такого же ускоренного движения по пути CG. Вместе с тем BD есть также время, в течение которого тело пройдет эту самую длину BD равномерным движением со скоростью, равной скорости его движения по окружности, ибо это время, по предположению, равно времени ускоренного движения по CB. Следовательно, и BE есть время, в течение которого тело пройдет путь BE со своей скоростью вращения. Таким образом установлено, что отрезок CG при равномерно ускоренном движении, начиная с покоя, проходится в то же время, в какое отрезок BE проходится равномерным движением с той скоростью, какой обладает наше тело при своем вращении. Далее установлено, что тело, будучи освобождено в B, придет, двигаясь равномерно, в E в тот момент, в который точка на окружности придет в F, так как прямая BE равна дуге BF, когда BE принимается бесконечно малым. Поэтому мы скажем, что тело имеет стремление удалиться от B естественно ускоренным движением и притом на длину EF за то время, за которое тело, двигаясь равномерно со своей вращательной скоростью, проходит длину BE, т. е. за то время, за которое тело ускоренным движением, начиная от покоя, прошло бы путь CG. (Что движение по EF естественно ускорено, доказано выше).

Таким образом, если будет доказано, что CG и FE равны, то этим будет доказано, что стремление подвешенного тела падать ускоренным движением как раз равно стремлению того же тела при вращении по окружности освободиться от нити также ускоренным движением, так как, очевидно, стремления к ускоренному движению равны, когда пути, проходимые в обоих случаях ускоренного движения, в равное время равны. Что CG и FE равны, — доказывается следующим образом.

HE относится к BE, как BE к BF, следовательно, HE^2 относится к BE^2, как HE к EF. Делим предыдущие члены на 4.

AF^2 относится к EB^2, как четвертая часть HE, за которую можно взять $\frac{1}{4}HF$, т. е. BC относится к FE. Но AF^2 относится к EB^2 или DB^2 относится к EB^2 так, как BC к CG, согласно построению. Таким образом, BC относится к CG, как BC к FE; следовательно, CG и FE равны, и наша теорема доказана.

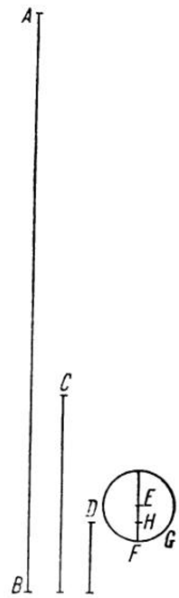
Предложение VI

Зная высоту, с которой тело падает по вертикали из состояния покоя в определенное время, например в одну секунду, найти такой горизонтальный круг, чтобы тело, вращаясь по этому кругу со скоростью, дающей один обо-

рот в одну секунду, имело центробежную силу, равную тяжести.[5]

Пусть данная высота равна AB (фиг. 12). Она проходится падающим телом в одну секунду. Пусть AB относится к C, как C к D, и пусть это отношение равно отношению длины окружности к диаметру.

Описываем окружность EFG, имеющую диаметр D. Я утверждаю, что это и есть нужная окружность. Делим радиус EF в H пополам. Тело, равномерно вращающееся по окружности EFG со скоростью, приобретенной при падении с высоты HF, будет иметь центробежную силу, равную тяжести (по предложению V). Если мы только покажем, что при указанной скорости тело будет совершать один оборот в одну секунду, то и будет показано, что круг EFG удовлетворяет требованиям. Установлено, что тело, упавшее с высоты HF, пройдет при равномерном движении со скоростью, достигнутой при падении, и в течение времени, равного времени падения, путь вдвое больший, чем HF. Следовательно, если тело вращается по кругу FG с этой скоростью, то оно пройдет окружность за время, относящееся ко времени падения на HF, как длина окружности к удвоенной длине HF, т. е. к EF. Помножим последующие члены пропорции на 2; мы получаем: время, потребное на один оборот по кругу FG, относится к двойному времени падения с высоты HF, т. е. ко времени падения с учетверенной высоты, т. е. с D, как длина окружности к диаметру ее, к D, т. е. как $C:D$ или как $AB:C$. Но отношение AB к C равно отношению времени падения вдоль A, т. е. 1 секунды ко времени падения вдоль D, так как AB относится к D, как AB^2 к C^2, следовательно, время оборота по окружности FG относится ко времени падения



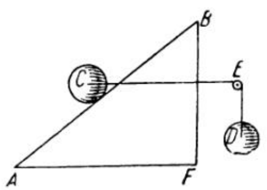
Фиг. 12.

вдоль D, как 1 секунда ко времени падения вдоль D, т. е. время обращения по окружности равно 1 секунде, что и требовалось доказать.

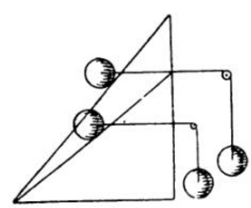
Вычисление показывает, что высота AB, которую падающее тело проходит в 1 секунду, равна 15 рейнским футам и $7^1/_2$ дюймам (Маятниковые часы, стр. 202), и так как отношение $AB:C$ есть отношение длины окружности к диаметру, т. е. отношение 22 к 7 (по Архимеду) и таково же отношение C к D, или к диаметру круга FG, то диаметр равен почти 19 унциям. Половина этого числа составляет 9 унций и 6 линий. Следовательно, если тело совершает 1 оборот в 1 секунду на круге радиусом $9^1/_2$ унций, то центробежная сила равна тяжести.

Лемма I

Если груз C (фиг. 13) удерживается на наклонной плоскости AB свободно свешивающимся грузом D, причем



Фиг. 13.



Фиг. 14.

шнур CE горизонтален, то отношение груза D к грузу C равно отношению высоты BF к основанию AF. Это — известное положение механики. Следовательно, в случае, если $BF = AF$, то и $C = D$.

Лемма II

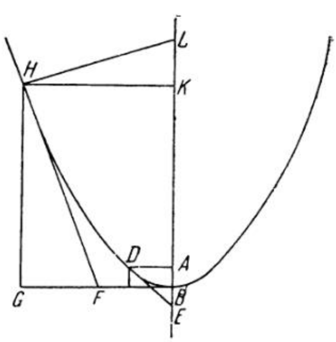
Если одинаковые грузы удерживаются на плоскостях различного наклона при посредстве горизонтальных шнуров,

(фиг. 14), то удерживающие силы пропорциональны тангенсам углов, составляемых наклонной плоскостью с горизонтальной плоскостью.

Предложение VII

Имеем параболоид вращения с вертикальной осью. Время обращения тела, вращающегося по горизонтальному кругу на кривой поверхности параболоида, одинаково, независимо от того, совершается ли вращение по большому или малому кругу, и равно времени двух колебаний маятника, длина которого равна полупараметру.[6]

Пусть HDB — парабола (фиг. 15), образующая параболоид при вращении вокруг оси BK. Откладываем вдоль оси длину $BA = \frac{1}{4}$ параметра, тогда соответствующая ордината AD равна полупараметру. Пусть теперь тело в D вращается вокруг оси с такой скоростью, что центробежная сила равна его тяжести. Эта сила удерживает тело в D, так как угол ADE равен половине прямого угла (по лемме I). Если же тело вращается в другой точке, например H, причем K — центр вращения и KH — радиус вращения, то центробежная сила, удерживающая тело в H, равна силе, действующей горизонтально в направлении HK, которая удерживает тело на плоскости HF, касательной к параболе. Эта сила, согласно лемме I, относится к силе тяжести, как $HG : GF$. Но вследствие подобия треугольников HKL и HFG, в которых HL перпендикулярно к HF, HG относится к GF, как HK к KL или как HK к AD, так как по свойству параболы KL всегда равно полупараметру, т. е. центробежная сила, удерживающая тело в H, относится к весу тела или



Фиг. 15.

к центробежной силе в D, как HK к DA. Поэтому времена обращения равны (по обратной теореме к предложению I).

Время оборота определяется следующим образом. Так как, по нашему предположению, тело D имеет центробежную силу, равную весу, то оно вращается со скоростью, приобретаемой при вертикальном падении с высоты $\frac{AD}{2}$ (по предложению V). Двигаясь с этой скоростью равномерно, тело за время падения прошло бы путь AD. Значит, время обращения относится ко времени падения с высоты $\frac{DA}{2}$, как длина окружности к радиусу DA. Но время очень малого колебания маятника относится ко времени падения с высоты, равной половине длины маятника, как длина окружности к диаметру (по предложению XXV второй части „Маятниковых часов“). Отсюда время двух очень малых колебаний маятника DA относится ко времени вертикального падения с половины DA, как окружность круга к радиусу, т. е. как время полного оборота к тому же времени падения с высоты $\frac{DA}{2}$. Следовательно, время обращения на параболоиде равно времени, в которое совершаются 2 колебания маятника длиною DA, равной половине параметра образующей параболы, что и требовалось доказать.

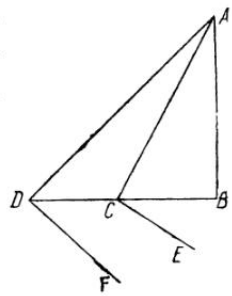
Предложение VIII

Если два подвижных, подвешенных на неравных нитях тела вращаются так, что описывают горизонтальные круги, причем один конец нити неподвижен, и если оси или высоты конусов, описываемых нитями при этом движении, равны, то и времена обращения равны.

Пусть нити AC и AD (фиг. 16) прикреплены к той же точке A и к ним прикреплены тела C и D. Эти тела вращаются по горизонтальным окружностям с радиусами BC

и BD. AB есть общая ось обоих конусов, которые нити AC и AD описывают при своем движении. Я утверждаю, что времена обращения одинаковы. Допустим сначала, что тела равны. Проводим CE перпендикулярно к AC и DF перпендикулярно к AD.

Ясно, что центробежная сила держит нити натянутыми в наклонном положении. Тело C стремится упасть вследствие своего веса так же, как если бы оно находилось на наклонной плоскости CE. Так как центробежная сила стремится удалить тело B от оси по линии BC и уравновешивает тяготение, то ясно, что она должна быть равна горизонтальной силе, удерживающей тело на наклонной плоскости CE. По той же причине необходимо, чтобы центробежная сила, удерживающая тело D, была бы равна горизонтальной силе, могущей удержать тело на наклонной плоскости DF. Но эта последняя сила относится к силе, удерживающей тело C, как тангенс угла DAB к тангенсу угла CAB, т. е. как DB к CB (по лемме II). Следовательно, центробежная сила, которой обладает тело D на своем круге, относится к центробежной силе тела C, как радиус DB к радиусу CB.

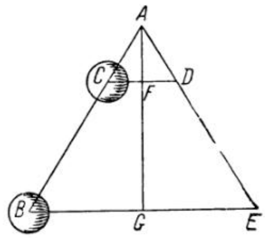


Фиг. 16.

Отсюда следует, что времена обращения D и C одинаковы (по обращенному предложению I). Если тела не равны, то равенство времен обращения все равно сохранится. Если, например, принять вес тела C бóльшим, чем прежде, то потребуется во столько же раз бóльшая горизонтальная сила, чем прежде, чтобы удержать тело на наклонной плоскости CE, и, следовательно, во столько же раз бóльшая центробежная сила. Для того чтобы иметь эту центробежную силу, тело C должно совершать оборот по кругу в то же время, в которое оно совершало его раньше, имея меньший вес. Следовательно, теорема верна.

Предложение IX

Времена обращения по горизонтальным кругам CD и BE, при том же угле вращения CAD (фиг. 17) относятся, как корни квадратные из длин нитей AC и AB.

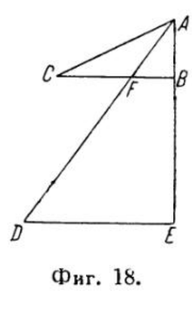


Фиг. 17.

Действительно, центробежная сила должна быть одна и та же при обоих указанных вращениях для сохранения того же наклона нити. Если же центробежная сила та же, то квадраты времен обращения должны относиться, как расстояния от оси вращения по обращенному предложению IV. Следовательно, квадраты времени обращения относятся, как CF к BG или как AC к AB, что и требовалось доказать.

Предложение X

Если два тела произвольной величины, висящие на нитях, вращаясь, описывают круги, то времена обращения относятся, как квадратные корни из высот конусов, поверхности которых описываются нитями.

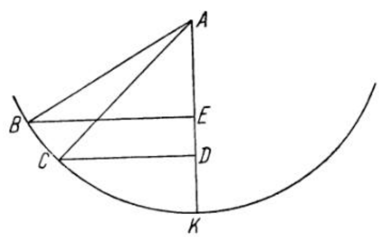


Фиг. 18.

Даны нити AC и AD (фиг. 18), прикрепленные к ним тела C и D описывают горизонтальные круги, тогда как концы нитей в A неподвижны. C описывает нитью AC боковую поверхность конуса CAB с осью AB, а D описывает нитью DA боковую поверхность конуса с осью AE. Я утверждаю, что время обращения тела C относится ко времени обращения тела D, как корни квадратные из AB и AE. Действительно, представим себе еще одно тело, прикрепленное к нити AF, описывающее при вращении конус с боковой поверхностью AF и осью AB. По теореме VIII его время обращения то же, что и тела C. Времена обращения тел F и D относятся, как корни квадратные из AF и AD или как (по предложению IX) $\sqrt{AB}$ к $\sqrt{AE}$. Следовательно, время обращения тела C относится ко времени обращения тела D, как корень квадратный из отношения AB к AE, что и требовалось доказать.

Предложение XI

Если тело, висящее на нити, другой конец которой неподвижен, описывает неравные горизонтальные круги, то времена обращения по этим кругам относятся, как корни квадратные из синусов углов, под которыми нить наклонена к горизонту.



Фиг. 19.

Пусть нить (фиг. 19) прикреплена в A и пусть груз, прикрепленный к нити, натягивает нить сначала по AB, а потом по AC. Проводим горизонтальные прямые BE и CD, пересекающие вертикаль AD в E и D. Так как AB и AC равны, то AE и AD представляют синусы углов ABE и ACD. Я утверждаю, что времена обращения по кругам и радиусам BE и CD относятся, как корни квадратные из AE и AD. Это, очевидно, следует из предыдущей теоремы.

Предложение XII

Если движущийся по конусу маятник совершает обращения по кругу очень малого радиуса, то время обращения относится ко времени вертикального падения с высоты

двойной длины маятника, как длина окружности к диаметру; поэтому оно равно продолжительности двух очень малых боковых колебаний того же маятника.

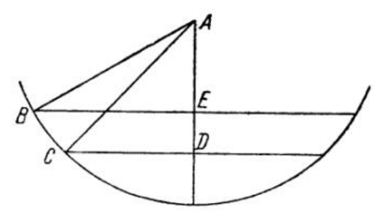
Пусть нить AC закреплена в A (фиг. 20), на ней висит тело, вращающееся по кругу радиуса $DC = DA$, так что угол CAD равен половине прямого угла. Тогда центробежная сила в C равна силе тяжести C (по лемме I), поэтому тело пробегает окружность со скоростью, приобретаемой при вертикальном падении с высоты, равной половине DC или DA; но $DC : CA = 1 : \sqrt{2}$, поэтому время вертикального падения с половины высоты DC относится ко времени вертикального падения с половины высоты CA, как $\sqrt{DC}$ к $\sqrt{CA}$ или как 1 к $\sqrt{\sqrt{2}}$.

Отсюда далее следует, что время вертикального падения с половины высоты DC относится ко времени падения с удвоенной высоты AC, которое в два раза больше времени падения с половины высоты AC, как $1 : 2\sqrt{\sqrt{2}}$ или как произвольный радиус r к удвоенному $r\sqrt{\sqrt{2}}$. Время вертикального падения с половины высоты DC относится ко времени обращения по кругу радиуса DC, как радиус к длине окружности.

Но время обращения по окружности радиуса DC относится ко времени обращения по очень малому кругу, как квадратные корни из AD и AC (по предложению X), т. е. как 1 к $\sqrt{\sqrt{2}}$; следовательно, время вертикального падения с половины высоты DC относится ко времени обращения по очень малому кругу, как радиус к длине окружности, взятой $\sqrt{\sqrt{2}}$ раз. Таким образом, время обращения маятника AC по очень малому кругу относится ко времени вертикального падения с двойной высоты AC, как длина окружности, взятая $\sqrt{\sqrt{2}}$ раз к радиусу, взятому $2\sqrt{\sqrt{2}}$ раз, т. е. как длина окружности к диаметру. Так как время очень малого бокового колебания маятника относится ко времени вертикального падения с высоты половины AC, или, удваивая оба члена отношения, время двух очень малых боковых колебаний маятника относится ко времени падения с высоты $2AC$, так же, как длина окружности ко диаметру, то время обращения маятника AC по очень малому кругу относится ко времени вертикального падения с высоты $4AC$, как время двух очень малых боковых колебаний маятника ко времени свободного падения с высоты $2AC$. Следовательно, время обращения конического маятника AC по очень малому кругу равно времени двух очень малых боковых колебаний того же маятника AC, что и требовалось доказать.

Предложение XIII

Тело, вращающееся на окружности и совершающее один оборот во время, в которое маятник длиной, равной радиусу этой окружности круга, совершает одно коническое обращение по очень малому кругу или два очень малых боковых колебания, имеет центробежную силу, равную его весу (фиг. 20).



Фиг. 20.

Пусть длина нити AC равна радиусу круга, по которому вращается тело, и пусть угол CAD равен половине прямого. Если время оборота вокруг круга CD равно 1, то время обращения по очень маленькому кругу будет $\sqrt{\sqrt{2}}$ (по предложению XI); по предположению, таково же время обращения по кругу радиуса AC. Следовательно, время обращения по кругу радиуса CD относится ко времени обращения по кругу радиуса AC, как 1 к $\sqrt{\sqrt{2}}$ или как $\sqrt{CD}$ к $\sqrt{AC}$. По обращенной теореме IV эти два тела имеют одинаковую центробежную силу. Так как на CD центробежная сила равна весу, то то же имеет место при вращении по кругу AC, что и требовалось доказать.

Предложение XIV

Время обращения любого маятника совершающего коническое движение, равно времени вертикального падения с высоты, равной длине нити маятника, если угол наклона нити к горизонту равен примерно $2°54'$ или, в точности, если синус указанного угла относится к радиусу, как вписанный в круг квадрат к квадрату длины окружности.[7]

Пусть $AD = DC = a$ (фиг. 20); $AE = b$, а отклонение окружности круга к диаметру равно отношению c к r. Время вертикального падения вдоль пути, равного половине CD, пусть будет $= 1$; тогда время падения по пути $\frac{1}{2}AC$ равно $\sqrt{\sqrt{2}}$. Но время падения с высоты $\frac{1}{2}AC$ относится ко времени падения с высоты AC, как 1 к $\sqrt{2}$. Следовательно, время падения с $AC = \sqrt{\sqrt{8}}$. Время оборота вокруг круга радиуса CD относится ко времени падения на половину CD, как c к r, следовательно, время оборота по кругу CD равно $\frac{c}{r}$. Время оборота по кругу C относится ко времени оборота любой точки B, как корни квадратные из AD и AE, т. е. как $\sqrt{a}$ к $\sqrt{b}$. Таким образом, время обращения B равно $\frac{c}{r}\sqrt{\frac{b}{a}}$. Если теперь принять, что AE, синус угла ABE, относится к радиусу AB, как квадрат, вписанный в круг, к квадрату длины окружности, то

$$b : a\sqrt{2} = 2r^2 : c^2$$

или

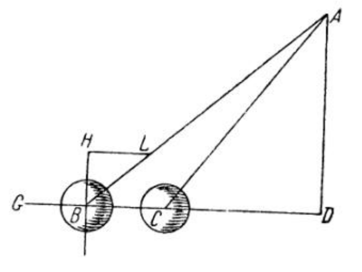
$$\frac{bc^2}{ar^2} = 2\sqrt{2}, \text{ или } \frac{c}{r}\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\sqrt{8}}.$$

Так как $\frac{c}{a}\sqrt{\frac{b}{a}}$ есть время обращения B, а $\sqrt{\sqrt{8}}$ — время падения с AC, то время обращения по B равно времени вертикального падения с высоты, равной длине маятника. Так как $2r$ относится к c, как 7 к 22, то $4r^2$ относятся к c^2, как $49:484$; следовательно $2r^2:c^2=49:968$. Отсюда по вышенаписанному соотношению $b:a\sqrt{2}=2r^2:c^2$ вычисляется синус b, т. е. синус угла ABE, полагая радиус $a\sqrt{2}$ равным 100 000. Это дает для b 5062, т. е. приблизительно, синус угла $2°54'$, что и требовалось доказать.

Предложение XV

Если два маятника одинакового веса, но неодинаковой длины, совершают коническое движение, причем высоты конусов равны, то силы, с которыми они натягивают нити, относятся как длины.

Пусть AB и AC (фиг. 21) — два маятника разной длины, на концах которых равные грузы B и C вращаются вокруг общей оси AD. Я утверждаю, что сила, которая натягивает нить AB, относится к силе, натягивающей нить AC, как длина AB к длине AC. Действительно, представим себе, что груз B удерживается в своем положении силой в A, которая тянет нить, и другой силой в G, равной центробежной силе, действующей в направлении BG.



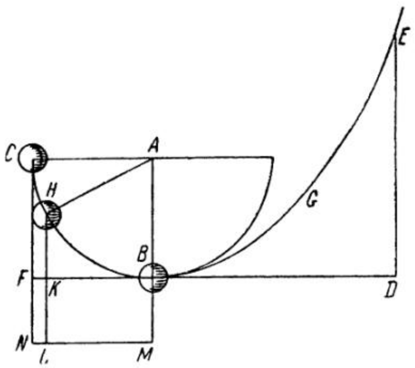
Фиг. 21.

В механике устанавливается, что, построив вертикаль BH и горизонтальную линию LH, мы можем написать соотношение. Сила в A, тянущая нить AB, относится к весу B, как LB к BH или как AB к AD. Так же точно сила, тянущая нить AC, относится к весу C, как AC к AD. Отсюда сила, натягивающая при вращении нить AB, относится к силе, натягивающей нить AC, как AB к AC, что и требовалось доказать.

Предложение XVI

Если простой маятник имеет наибольшее боковое отклонение, т. е. падает через весь квадрант круга, то он, придя в низшую точку круга, тянет нить с силой в три раза большей, чем если бы был просто подвешен к нити в спокойном состоянии.[8]

Если шар C (фиг. 22), соединенный с A нитью AC, упадет вдоль по квадранту CB, то он, прийдя в B, будет тянуть нить с силой втрое большей, чем если бы он был просто подвешен и действовал только своим весом.



Фиг. 22.

Прежде всего скорость, с которой начал бы двигаться шар по прямой BD, если бы он освободился бы в B, равна скорости, приобретенной в точке F при свободном падении с высоты CF. В точке F шар приобрел бы такую скорость, что он прошел бы с ней расстояние, вдвое большее, чем CF, двигаясь равномерно в течение того же времени, какое было необходимо для падения от C до F. Следовательно, шар имеет в B стремление пройти путь BD, равный $2AB$, за то время, какое потребовалось для падения от A до B. При этом, правда, не принят во внимание вес, под влиянием которого тело опустилось бы вниз и описало бы параболу

Пусть BGE — парабола с полупараметром AB, B — ее вершина. Так как в начале равномерного движения шара B по прямой B (вблизи точки B) отступления шара от окружности B совпадают с его отступлениями от параболы BGE, то ясно, что центробежная сила, которой обладает шар B только благодаря вращению есть стремление удалиться от центра A или от окружности BC ускоренным движением соответственно числам 1, 3, 5, 7... и поэтому это стремление того же рода, как и стремление падать, которое мы называем тяжестью. Это стремление шара B по величине равно стремлению равного ему тела, которое ускоренным движением пройдет отрезок DE в то время, в какое шар равномерным движением пройдет BD, т. е. в то время, в которое шар также ускоренным движением падает от A до B. Так как DE в два раза больше AB, то центробежная сила вдвое больше силы тяжести, но к этому прибавляется еще стремление, зависящее от тяжести, благодаря которому шар в то время, в которое он падает из A в B, и теперь стремится пройти вниз такое же расстояние естественно ускоренным движением. Таким образом, благодаря обеим причинам шар стремится пройти ускоренным движением соответственно числам 1, 3, 5, 7 расстояние $DE+AB$, т. е. втрое больше, чем AB. Поэтому и сила, с которой шар тянет нить в B после падения из C, втрое больше той силы, которая наблюдается при простом подвешивании того же шара. Это в точности согласно с опытом. Если я хочу узнать, с какой силой натягивается нить AB, если шар падает по дуге HB, то делается следующее построение. Берется FN, равное половине AB, и строится прямоугольник $BFNM$. Проводят HL параллельно AB.

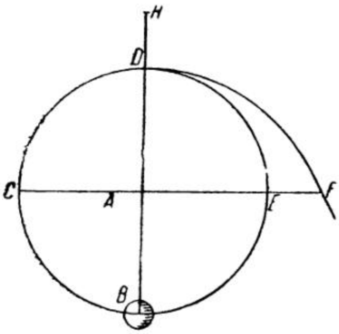
Я утверждаю, что искомая сила натяжения относится к простому весу, как $HL:LK$.

Если BH — шестая часть окружности, то сила натяжения равна двойному весу, и потому надо взять нить вдвое крепче, чем та, которая удерживает шар в состоянии покоя, и т. д.

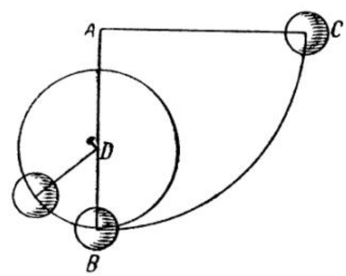
Предложение XVII

Шар, подвешенный к центру вертикального круга на нити, не может вращаться по этому кругу, если нить не в состоянии выдержать силы натяжения, превышающей его вес в шесть раз.

Пусть $BCDE$ (фиг. 23) — круг, установленный вертикально. Шар свешивается из центра A. Я утверждаю, что для вращения шара B по окружности $BCDE$ необходима нить, выдерживающая подвешивание груза в шесть раз большего, чем B. Действительно, для того чтобы нить осталась натянутой, когда шар проходит через D и падает по дуге DE, необходимо, чтобы скорость шара в точке D была такова, чтобы, будучи отпущен, он описал параболу, полупараметр которой равен AD. Таким образом, шар в точке D должен иметь



Фиг. 23.



Фиг. 24.

ту скорость, которую он имел бы в этой точке, падая с высоты $HD = \frac{1}{2} AD$. Для того чтобы шар, подымаясь от B по пути BCD, сохранил в D необходимую скорость, необходимо, чтобы его скорость в B была такова, чтобы ее хватило для поднятия шара по вертикали до точки H. Действительно, если шар обладает такой скоростью в B, то какими бы путями он ни поднялся в D, всегда у него останется достаточно скорости, чтобы по вертикали или иным путем подняться до H, т. е. у шара останется столько скорости, сколько приобретается при падении по HD и сколько, как мы указали, ему нужно в точке D.

Скорость, необходимая, чтобы подняться по вертикали из B в H, или приобретаемая при падении вдоль от H до B, относится к скорости, приобремаемой при падении из A в B, как корни квадратные из этих расстояний, т. е. как $\sqrt{10}$ к 2.

В предыдущей теореме показано, что одна центробежная сила вдвое больше веса, если шар вращается по вертильному кругу со скоростью, приобретаемой падением от A до B или по дуге EB. Скорость, с которой вращается шар по кругу по условиям рассматриваемой теоремы, относится к только что упомянутой, как $\sqrt{10}$ к 2, и, следовательно, центробежные силы относятся друг к другу, как $10:4$ или $5:2$ (по предложению II). Следовательно, здесь центробежная сила относится к весу, как $5:1$. К этой центробежной силе надо, при прохождении шара через B, прибавить силу тяжести, с которой шар стремится вниз и которая, как мы указали, относится к центробежной силе, 1 к 5. Таким образом, общая сила или натяжение нити при прохождении через точку B равно ушестеренной тяжести шара.

Отсюда я нахожу: если шар, прикрепленный к нити AB (фиг. 24), отпустить из точки C — на той же высоте, что A, и если разделить вертикальную линию AB так, чтобы $DB = \frac{2}{5} AB$, и в точке D вбить гвоздь, который задержит нить при падении шара из C, то шар может совершить полный оборот вокруг D, описав окружность, но если вбить гвоздь выше, чем D, то это невозможно. Ибо для возможности полного оборота скорость в B должна относиться к скорости, приобретаемой при падении с высоты DB, как $\sqrt{10}:2$ (см. выше), следовательно, высоты падения, при которых достигаются указанные две скорости, должны находиться в отношении квадратов этих величин, т. е. в отношении $10:4$ или $5:2$. Следовательно, $AB:DB = 5:2$.[9]

ПРИЛОЖЕНИЯ

ХРИСТИАН ГЮЙГЕНС

Краткий биографический очерк

Христиан Гюйгенс (Хейгенс — по голландскому произношению) — выдающийся математик, физик и астроном XVII в., многие из научных открытий которого не потеряли своего значения до настоящего времени, — родился в Голландии, в Гааге, 14 апреля 1629 г. Отец его, Константин Гюйгенс, был известным голландским поэтом и влиятельным государственным деятелем — секретарем при трех штатгалтерах, впоследствии председателем Государственного совета. Он был очень образованным человеком и переписывался со многими видными учеными того времени, в том числе с Декартом. Первое обучение Христиан Гюйгенс получил от своего отца, который учил его математике, географии, музыке и классическим языкам. Уже в ранние годы он проявил исключительные способности. В тринадцать лет Гюйгенс уже знал многое из механики и пристрастился к построению механизмов. Пятнадцати лет Гюйгенс приступил к серьезному изучению математики под руководством бельгийского ученого Стампиуса. Шестнадцати лет он поступил в Лейденский университет, где обучался, по желанию отца, юридическим наукам, но не прекращал и занятий по математике, которыми руководил профессор Схоутен, ставший впоследствии другом Гюйгенса. Уже в студенческие годы Гюйгенс приобрел известность среди математиков, много старше его по возрасту. Из Лейдена он перешел в юридическую школу в Брэде, где три года изучал право. Затем Гюйгенс совершил поездку в Голштинию, Данию, Швецию. Вернувшись в Голландию, он напечатал свой первый трактат о квадратуре гиперболы, эллипса и круга. Уже этот трактат поставил его в ряды лучших математиков того времени. Одновременно он занимался диоптрикой.

В 1655 г. Гюйгенс защитил во Франции, в Анжере, диссертацию на степень доктора прав. Наряду с этим он много времени уделял занятиям практической оптикой: шлифовал и полировал вместе с братом Константином стекла и изготовлял телескопы, превзошедшие по качеству все тогда существовавшие. При помощи своего телескопа Гюйгенс открыл спутника Сатурна. К шлифованию стекол Гюйгенс возвратился в период между 1681 и 1687 гг. Наибольшие из изготовленных им телескопов имели длину 210 и 170 футов (около 60 и 48 м). Это были „воздушные" телескопы без медных труб.

В 1656—1657 гг. Гюйгенс, по выражению его биографа Гравезанда, первый из смертных точно измерил время. Тогда же им были построены первые маятниковые часы, на которые он взял в Голландии патент. Он сразу приспособил часы к морскому делу, а именно — к определению долготы на море. В этом сказалась отличительная черта Гюйгенса — стремление использовать свои научные открытия в практических целях. Гравезанд пишет, что Гюйгенс всю свою жизнь посвятил изучению математических наук и не столько был предан отвлеченным, абстрактным рассуждениям, сколько выявлению важных применений этих наук к жизни.

В 1659 г. Гюйгенс напечатал книгу о Сатурне, в которой объяснил вид планеты. Он первый, благодаря превосходным качествам своей трубы, ясно увидел кольцо, окружающее Сатурн.

В 1660 г. он сделал важное открытие в области механики, а именно — первый дал правильную формулировку закона упругого удара тела.

В 1663 г. Гюйгенс был избран членом Лондонского королевского общества. Вскоре после этого произошло важное событие в жизни Гюйгенса. Министр Людовика XIV Кольбер пригласил Гюйгенса в Париж, в только что основанную Королевскую академию наук. В Париже Гюйгенс пробыл 15 лет, с 1666 до 1681 г., и выполнил за это время много прекрасных работ в области математических наук. К парижскому периоду относится выпуск в свет его исследования под названием „Маятниковые часы“ (в 1673 г.) — одной из замечательнейших книг по механике, предшествовавшей появлению „Математических начал“ Ньютона. О содержании этой работы будет сказано ниже. К парижскому периоду относится также написание Гюйгенсом знаменитого трактата о свете и рассуждения о причине тяготения, хотя обе эти работы появились в печати только в 1690 г.

В 1681 г. Гюйгенс покинул Париж, отказавшись от звания академика. Основной причиной отъезда были начавшиеся во Франции религиозные гонения, „знаменитые“ драгонады Людовика XIV. В то время из Франции уехали многие выдающиеся деятели. Кроме Гюйгенса Парижскую академию оставили такие знаменитые академики, как физик Папен и астроном Ремер.

Остальную часть своей жизни, с 1681 по 1695 г., Гюйгенс провел на родине, в Гааге, в занятиях научными исследованиями. Часть его трудов, в том числе исследования об упругом ударе и о центробежной силе, были напечатаны только после его смерти.

Несколько раз из Гааги и из Парижа Гюйгенс ездил на короткое время в Англию, где делал доклады о своих научных изысканиях.

Этими немногими фактами исчерпывается вся внешняя сторона биографии Гюйгенса. Вся жизнь Гюйгенса неразрывно связана с его научной деятельностью.

Ввиду того, что работам Гюйгенса по механике посвящена особая статья, мы ограничимся кратким перечнем его основных работ в других областях.

Главнейшие из работ Гюйгенса по математике следующие:

1. Теоремы „О квадратуре гиперболы, эллипса и круга" (Theoremata de quadratura hiporbolis, ellipsi et circuli), выпущенные в 1651 г. Уже эта работа поставила Гюйгенса в первые ряды математиков его времени.

2. Следующее большое исследование 1655 г. „О величине круга" (De circuli magnitudine inventa) представляет первый после Архимеда успех в исчислении отношения длины окружности к диаметру. Гюйгенс дает число π с 14 значащими цифрами и замечает, что если бы он вместо своих неравенств при вычислении пользовался неравенствами Архимеда, то ему пришлось бы вычислить правильный многоугольник с 20 000 сторонами.

Гюйгенс с молодости интересовался тремя большими проблемами древности: удвоением куба, трисекцией угла и квадратурой круга. Он не был убежден в невозможности квадратуры круга и всегда думал, что она в конце концов удастся (полемика с Грегори, 1669; письмо к Лейбницу, 1774). Заметим, что в 1906 г. вышла книга Рудио „О квадратуре круга", в которой Гюйгенс цитируется как один из четырех авторов, которые продвинули проблему о квадратуре круга за время от Архимеда до наших дней.*

3. В 1656 г. вышел мемуар Гюйгенса „О расчетах при игре в кости" (De rationiciis in ludo aleae), положивший начало научному построению теории вероятностей.

4. Четвертой и пятой большими работами следует считать „Учение об эволютах и эвольвентах", созданное Гюйгенсом и составляющее часть его труда „Маятниковые часы" (Horologium oscillatorium. Париж, 1673), равно как и вопрос о таутохронизме, изложенный там же.

Мы не останавливаемся на большом ряде более мелких

* Имеется русский перевод этой книги. Последнее, третье, издание перевода вышло в 1936 г. „Архимед, Гюйгенс, Ламберт, Лежандр. Четыре сочинения об измерении круга". С приложением истории вопроса. Составил Ф. Рудио. Пер. под ред. и с примеч. акад. С. Н. Бернштейна.

работ (анализ практически важных кривых: циклоиды, логарифмики, цепной линии; выпрямление кривых линий, определение площадей кривых поверхностей и объемов разных тел, и т. п.).

В области физики необходимо особо отметить работы Гюйгенса по оптике. С молодых лет Гюйгенс не оставлял занятий оптикой, как прикладной, так и теоретической. Он составил руководство „Как формовать и полировать линзы" и сам был большой мастер в этом деле. Помощником его, как указано выше, был его старший брат Константин.

Гюйгенсу принадлежит фундаментальный труд „Диоптрика" (Dioptrica), напечатанный после его смерти.

Он много работал над созданием телескопов с большим фокусным расстоянием, доходивших до 210 футов (60 м).

Ему принадлежит „окуляр Гюйгенса", которым физики и астрономы пользуются в настоящее время.

Особо следует отметить вышедший в 1690 г. на французском языке „Трактат о свете" (Traité de la lumière), одно из замечательнейших произведений XVII в. Здесь ярко проявилась и его блестящая интуиция в области физики, и необыкновенное геометрическое воображение. В противоположность Ньютону, Гюйгенс выступает в этом трактате сторонником волновой теории света. Многие выводы, изложенные в этой книге, и теперь даются в курсах оптики и физики.

Следует, впрочем, отметить, что Гюйгенс сделал свои общие выводы об основных законах распространения света, не опираясь на понятие о световой волне, периодически повторяющейся в пространстве. Это понятие он даже не считает необходимым вводить в свои рассуждения. Так же точно он устраняет вопрос о цветах, представивший для него непреодолимые затруднения.

Особенно блестящие страницы этого трактата посвящены распространению света в исландском шпате и двойному лучепреломлению в нем. Необходимо отметить, что во времена Гюйгенса не существовало никакой теории распространения света, на которую он мог бы опереться в своих рассуждениях. Упругостно-эфирная теория была введена в науку значительно позднее. Гюйгенс, опираясь только на простые опыты, на геометрический разбор хода лучей и на свой принцип, до сих пор известный как „принцип Гюйгенса“, совершенно правильно разобрался в форме волновых поверхностей, распространяющихся в одноосном кристалле, и объяснил все частные случаи преломления в исландском шпате. Громадный успех и распространение оптических идей Ньютона в течение продолжительного времени оттеснили эту работу Гюйгенса, получившую должное признание только в начале XIX в.

Из работ Гюйгенса по астрономии отметим следующие.

Гюйгенс, как указано выше, благодаря превосходству своих оптических труб, первый ясно увидел кольцо Сатурна и объяснил те странные формы Сатурна, которые были наблюдены астрономами до него. Ему принадлежит также открытие одного из спутников Сатурна.

Последняя работа Гюйгенса, законченная им незадолго до смерти (1695 г.) и появившаяся в печати в 1698 г., была посвящена астрономии. Она носит название „Космотеорос“. Книга эта занимает совсем особое место среди всех работ Гюйгенса: она посвящена его брату Константину и написана в интимном стиле. Книга содержит представления Гюйгенса о мироздании. Значительная часть книги посвящена вопросу о множественности обитаемых миров. Основная часть книги представляет едва ли не первую и блестяще написанную популярную астрономию. В книге изложена коперникова система мира и все, что в то время было известно о Солнце, планетах, их спутниках и звездах. Любопытно, что в этой книге приведены результаты первого звездного фотометрирования, произведенного Гюйгенсом. Гюйгенс сравнил Солнце с Сириусом и для фотометрирования построил особый прибор. Число, даваемое Гюйгенсом, конечно, не заслуживает большого доверия, но все-таки эта работа положила начало новому направлению в астрономии. Любопытна и судьба этой небольшой книги. Она так понравилась современникам, что ее латинский оригинал в короткое время выдержал два издания, и одновременно книга была переведена на французский язык под названием „О множественности обитаемых миров“ (De la pluralité des mondes habités).*

Из работ Гюйгенса в области точного приборостроения следует отметить изобретение маятниковых часов и изобретение пружинного регулятора (балансира) карманных часов. Последняя работа вовлекла его в большую полемику с Р. Гуком, который приписывал изобретение балансира себе.

Как философ Гюйгенс принадлежал к последователям Декарта, хотя и жестоко критиковавшим некоторые работы последнего. Эта критика, однако, не помешала ему остаться картезианцем в своих основных установках. Гюйгенс — яркий представитель прогрессивного для эпохи XVII в. механистического мировоззрения. С особой резкостью эти его взгляды высказаны в „Трактате о свете„ и в „Рассуждении о причине тяготения“. В „Трактате о свете“ он говорит: „В истинной философии причину всех естественных явлений постигают при помощи соображений механического характера. По моему мнению, так и следует поступать, в противном случае приходится отказаться от всякой надежды когда-либо и что-нибудь понять в физике“. В рассуждении о причине тяготения Гюйгенс возражает против формы, которую Ньютон придал закону всемирного тяготения, — „потому что ее нельзя объяснить механически“ (см. статью „Работы Гюйгенса в области механики“ в настоящем издании).

Труды Гюйгенса издавались несколько раз. В 1703 г. издан ряд ненапечатанных при его жизни мемуаров под редакцией профессоров Б. де Фолдера и Б. Фуллениуса (Christiani Hugenii opuscula postuma). В 1724 г. Гравезанд издал труды Гюйгенса под названием „Christiani Hugenii opera varia“.

---

* Книга Гюйгенса была переведена на русский язык Антиохом Кантемиром.

Это издание было дополнено Гравезандом в 1728 г. (Christiani Hugenii opera reliqua). В „Opera varia“ Гравезанд поместил биографию Гюйгенса (Hugenii vita).

Самое полное издание трудов Гюйгенса выпускается Голландским обществом наук (Société hollandaise des sciences) под названием: „Oevres complètes de Christiaan Huygens“. Повидимому, это многотомное издание еще не вполне закончено, хотя оно начало выходить в конце XIX в. По типу оно подходит к известному изданию „Edizione nazionale“ трудов Галилея. В нем воспроизведены все мемуары и рисунки Гюйгенса, и если язык подлинника — латинский, то дается очень точный и близкий к подлинному перевод на французский язык. Даны сохранившиеся варианты, черновики рукописей, черновые рисунки, гравюры времен Гюйгенса, и т. д. Первые 10 томов заключают обширную и очень интересную переписку Гюйгенса. Последний том должен заключать научную биографию Гюйгенса.

На русский язык переведены „Трактат о свете“ * и „Космотеорос“. На немецком языке имеется „Космотеорос“ и „Рассуждение о причине тяготения“. Далее в издании „Ostwald's Klassiker“ вышли в немецком переводе три мемуара по механике и трактат о свете. Исторический комментарий в них совершенно устарел и частью не верен. Математические выкладки представляют интерес и использованы в настоящем издании.

Литература о Гюйгенсе довольно велика и разнообразна, вплоть до особого периодического издания „Christiaan Huygens“, выходившего в Голландии.

К. К. Баумгарт.

---

* Христиан Гюйгенс. Трактат о свете. М.—Л., 1935.

РАБОТЫ ХРИСТИАНА ГЮЙГЕНСА ПО МЕХАНИКЕ

XVII в. был особенно богат выдающимися учеными, которые произвели замечательные исследования в различных областях знания.

По словам Ф. Энгельса, это была эпоха зарождения новой науки „... которая нуждалась в титанах и которая породила титанов по силе мысли, страсти и характеру, по многосторонности и учености".* Ограничиваясь областью физики и притом только исследованиями по механике, мы можем назвать трех ученых XVII в., слава которых не померкла в веках. Это Галилео Галилей, Христиан Гюйгенс и Исаак Ньютон.

К самому концу XVI в. и первой половине XVII в. относятся исследования Галилея, борца за новое мировоззрение и мученика этой борьбы, великого ученого, основоположника современного экспериментального метода в физике, положившего начало новой динамике. Ему принадлежит установление ряда основных понятий кинематики и динамики: скорости, ускорения и силы. Ему принадлежит также изучение простейших движений в механике, главным образом падения тел, как свободного, так и вдоль наклонной плоскости. Галилеем также начато изучение движения маятника. Он решил ряд вопросов статики и гидростатики и формулировал закон инерции и классический, так называемый „галилеевский" принцип относительности, а также принцип суперпозиции.

* Ф. Энгельс. Диалектика природы. 1950, стр. 4.

„Так же, как история статики начинается с Архимеда, историю динамики открывает имя Галилея“.*

В конце XVII в., в 1687 г., вышли в свет „Математические начала естественной философии“ Исаака Ньютона,** гениальная, стройная система динамики. Эта книга представляет одно из величайших творений человеческой мысли. Механика Ньютона охватила все результаты, добытые его предшественниками, в том числе и Галилея и Гюйгенса. Однако это обстоятельство не умаляет заслуг этих ученых, на работы которых Ньютон несомненно опирался. Гюйгенс — несомненно один из величайших физиков, математиков и астрономов. Хронологически он стоит между Галилеем и Ньютоном. Его исследования относятся к середине и второй половине XVII в. Главнейшие его работы по механике были фактически выполнены до появления в свет ньютоновских „Начал“,*** хотя некоторые и были полностью напечатаны только после его смерти (мемуары „О движении тел под влиянием удара“ и „О центробежной силе“).

Гюйгенс был человеком конкретного образа мышления. Его первый биограф, Гравезанд, подчеркивает, что он, всю жизнь занимаясь математическими науками, не столько был занят отвлеченными рассуждениями, сколько выявлением всего, что служит непосредственно на пользу людям. Благодаря этому он сделал много теоретически важных открытий. Несомненно он был крупнейшим физиком своего времени, уступая по силе таланта только всеобъемлющему гению Ньютона. Но и рядом с Ньютоном он сумел сохранить свою индивидуальность и всегда шел своими оригинальными путями. Так было, например, в вопросах о природе света и о причине тяготения.

---

* Акад. С. И. Вавилов. Галилей. Большая советская энциклопедия, 1-е изд., т. 14, столб. 350.

** Philosophiae naturalis principia mathematica autore J. S. Newton. Londini, Anno MDCLXXXVII.

*** За исключением „Рассуждения о причине тяготения“ (1790), являющегося несомненно реакцией на ньютоновское толкование тяготения.

Ньютон со своей стороны относился к Гюйгенсу с большим уважением, причисляя его к „величайшим геометрам нашего времени". Ньютон вообще в своих трудах цитировал лишь немногих ученых; Гюйгенс относился к этим немногим.

В XVII в. всех математиков звали геометрами, но к Гюйгенсу этот термин может быть отнесен и в более узком смысле. Он в совершенстве и с большой силой владел именно геометрическим методом рассуждения. Так построены, в частности, и все его мемуары по механике. Указываются исходные „гипотезы", дальше идут доказываемые положения, называемые иногда теоремами (theoremata), иногда предложениями (propositiones). За ними идут следствия или задачи. Следует заметить, что и ньютоновы „Начала" построены по той же схеме, только слово „гипотезы" заменено словом „аксиомы". Коренное различие здесь в отношении к гипотезам. У Ньютона „аксиомы" суть результат обобщения многовекового опыта. При их помощи выводятся теоремы или предложения, математическим путем или путем опытов, а к гипотезам Ньютон относится скептически. У Гюйгенса гипотезы играют иную роль. Они нужны ему, чтобы „объяснить явление". „А объяснить" у Гюйгенса — значит дать механическое толкование. Здесь необходимо немного остановиться на картезианстве Гюйгенса и на его механистическом мировоззрении. В молодости Гюйгенс находился под сильным влиянием Декарта, друга его отца. Как известно, Декарт в естествознании не применял своей метафизической философии. В основе физики и космогонии Декарта лежат: 1) материя, лишенная всяких „врожденных" свойств, обладающая только протяженностью и формой, и 2) движение этой материи. Силы появляются только как результат движения материи. В этом смысле Декарт является родоначальником того механистического материализма, который преобладал среди естествоиспытателей до конца XIX в. и который в свое время был несомненно прогрессивным явлением, способствовавшим развитию наук. Энгельс называет Декарта и Спинозу блестящими представителями диалектики в новой философии XVII в. Гюйгенс усвоил основные позиции картезианской философии природы и оставался им верен в течение всей своей деятельности. Однако несмотря на это Гюйгенс, видя грубые ошибки Декарта, неоднократно отмечал их.

Представляет интерес замечание, которое Гюйгенс написал в конце своей жизни на двухтомной „Жизни Декарта“, написанной Байе.* Гюйгенс пишет: „Господин Декарт нашел способ заставлять своих читателей принимать за истину его соображения и вымыслы [ses conjectures et fictions]. С читателями его «Основ философии» происходит нечто подобное тому, что происходит с читателями романов, которые нравятся и производят впечатление истинных происшествий. Новизна его образов мелких частиц и вихрей производит очень приятное впечатление. Когда я в первый раз читал книгу «Основы философии», мне казалось что все идет превосходнейшим образом, и я думал, что те затруднения, которые я иногда испытывал, объясняются тем, что я не вполне понял мысль автора. Мне было только 15 или 16 лет. Однако впоследствии я от времени до времени обнаруживал вещи, явно ошибочные, и другие вещи, очень мало вероятные; и моя точка зрения изменилась“.

Любопытно, что этот перелом в настроении Гюйгенса начал выясняться уже в 1652 г., когда Гюйгенсу было только 23 года. В письме к Эйтсховену в январе 1652 г. Гюйгенс пишет, что сомневается в декартовых законах движения, кроме первого. Здесь речь идет о законах соударения тел. Гюйгенс выражается даже резче: „сомневается, чтобы не сказать, что считает их неверными.“ Ту же мысль он повторяет в декабре 1652 г. в письме к Схоутену, своему университетскому учителю и другу. Интересно, что Схоутен, для

* La vie de Monsieur Des Cartes, par Adrien Baillet. 1691. Цит. по: Oevres complètes de Christiaan Huygens, t. X, p. 403.

которого Декарт был высшим авторитетом, не может допустить ошибку у Декарта и советует Гюйгенсу заняться какимнибудь другим вопросом.

Механистическое мировоззрение Гюйгенса особенно резко выразилось в его „Трактате о свете" и в „Рассуждении о причине тяготения". В „Трактате о свете" имеется известное высказывание Гюйгенса: „В истинной философии причину всех естественных явлений постигают при помощи соображений механистического характера. По моему мнению, так и следует поступать, в противном случае приходится отказаться от всякой надежды когда-либо и что-нибудь понимать в физике".*

Для картезианца „постичь при помощи соображения механического характера" — означает объяснить все явления природы при помощи механического движения материи. В „Рассуждении о причине тяготения" имеются не менее определенные высказывания Гюйгенса в этом направлении. Так, полемизируя с Ньютоном, Гюйгенс не может понять, как это каждая частица одного тела притягивает каждую частицу другого тела, причем другие частицы не производят никакого экранирующего действия. Гюйгенс убежден, что подобное поведение нельзя объяснить законами механики и без участия промежуточной среды. По той же причине Гюйгенс не согласен с тем, что внутри весомого шара сила тяготения убывает. Он не считает возможным объяснить тяготение, не привлекая промежуточную эфирную среду. Все эти соображения привели Гюйгенса к созданию неверной эфирно-вихревой теории тяготения. Тем не менее и этот мемуар содержит очень много интересных соображений и замечаний. Акад. С. И. Вавилов в своей статье о Гюйгенсе** очень правильно называет „Трактат о свете" и „Рассу-

* Х. Гюйгенс. Трактат о свете. ОНТИ, М.—Л., 1935, стр. 12.

** С. И. Вавилов. Гюйгенс. Большая советская энциклопедия, 1-е изд., 1930, т. 20, столб. 85.

ждение о причине тяготения“ первым эскизом физики эфира.

Переходим от общей характеристики деятельности Гюйгенса к вопросу о том, что сделано им в механике. Результаты его исследований в этой области весьма велики. Он значительно расширил пределы наших знаний за рамки, достигнутые Галилеем. Основные задачи динамики были решены им. Гюйгенс закончил рассмотрение законов падения тел, как свободного, так и вдоль наклонных линий (прямых и кривых) и дополнил их исследованием о таутохроне (вторая часть „Маятниковых часов“). Он нашел законы движения математического и физического маятников, разобрал вопрос о соударении упругих тел и вопрос о центробежной силе. Он положил начало механике твердого тела; при решении вопроса о законах движения физического маятника он впервые, хотя и не совсем отчетливо, пользуется понятием о моменте инерции. В мемуарах о движении тел под влиянием удара и о центробежной силе Гюйгенс дал замечательные примеры пользования принципом относительности движения. В мемуаре о движении тел под влиянием удара он, для частного случая, формулирует теорему живых сил. В „Маятниковых часах“ Гюйгенс находит центр качания физического маятника на основании следующего принципа: у системы материальных точек (связанных или свободных), движущихся под влиянием тяжести, центр тяжести не может подняться выше своего первоначального положения.

Это несомненно принцип энергетического порядка. Во времена Гюйгенса он вызвал острую полемику, о которой будет сказано ниже. Гюйгенс называет его „великим принципом механики“ и утверждает, что на основании его можно доказать многие теоремы динамики и статики. Любопытно, что в пользу этого принципа Гюйгенс приводит такое соображение: нарушение этого принципа приводит к возможности построения вечного двигателя, а это невозможно. Формулировка: „perpetum mobile невозможно“ — есть одна из современных формулировок закона сохранения энергии; таким образом, Гюйгенс имеет право числиться среди предшественников установления этого закона.

Как известно, закон сохранения энергии, строго формулированный только в середине XIX в., был в той или иной мере предвосхищен выдающимися учеными XVII и XVIII вв., далеко опередившими свое время. Таковыми были в XVII в. — Декарт, Гюйгенс, Лейбниц, в XVIII в. — Бернулли, Лагранж и, в особенности, гениальный основоположник русской науки М. В. Ломоносов, широко образованный, одинаково сильный и в науках естественных, и в глубоких философских обобщениях.

Ломоносов выразил свой закон сохранения движения в наиболее общей форме. В письме к Эйлеру от 5 июля 1748 г. и в „Рассуждении о твердости и жидкости тел“ (1760) Ломоносов пишет: „Все перемены, в натуре случающиеся такого суть состояния, что сколько чего у одного тела отнимается, столько присовокупится другому. Так, ежели где убудет материи, то умножится в другом месте; сколько часов положит кто бдению, столько же ему отнимет. Сей всеобщий закон простирается и в самые правила движения: ибо тело движущее своею силой другое, столько же оное у себя теряет, сколько сообщает другому, которое от него движение получает“. Как известно, Ломоносов видел причину теплоты в движении частиц тела, а не в теплороде. Это позволило ему в „Рассуждении о причинах тепла и стужи“ „энергетически“ рассмотреть вопрос об обмене теплоты между телами, далеко опередив, таким образом, своих современников (1746).

Гюйгенс был первый, кто приложил вышеизложенный принцип движения центра тяжести системы материальных точек к динамике. К статике он же приложил его еще в превосходной юношеской работе „О плавающих телах“,* а также

* De iis que liquido supernatant libri III. 1950. Oevres complètes de Christiaan Huygens, t. XI, pp. 81—211.

при решении задачи о цепной линии. Здесь этот принцип приобретает известный вид о наинизшем положении центра тяжести как условии равновесия. Но в статике Гюйгенс имел предшественников. Сам Гюйгенс впоследствии указывал Галилея и Декарта и, с большими оговорками, Фабри и Борелли („сделали много ошибок", „из часто неверных предпосылок сделали кое-какие верные выводы", и т. д.).

Как видно из предыдущего, Гюйгенс в своих механических работах дошел до далеко идущих обобщений. Наряду с этим не надо забывать конкретность мыслей Гюйгенса, всегдашнюю тесную связь науки с актуальными проблемами практики, даже ремесла в его работах. Гюйгенс был подлинный мастер, оптик-механик, как мы бы теперь сказали.* Смолоду он много мастерил. В течение всей жизни он шлифовал и полировал стекла и достиг в этом большого совершенства.** Он изобрел такой важный инструмент, как маятниковые часы. Это его бессмертная заслуга перед наукой и культурой. Он же изобрел балансир, регулятор карманных часов. Всю жизнь он поддерживал деловые отношения с разными часовщиками, работавшими по его заданиям. Он строил лучшие астрономические трубы своего времени. Ему принадлежит „окуляр Гюйгенса", доныне употребляемый. Уже после его смерти было напечатано его руководство к шлифованию и полированию стекол.***

Из этого труда видно, что у Гюйгенса была настоящая мастерская со своим станочным оборудованием, причем ряд усовершенствований станков принадлежал самому Гюйгенсу.

---

* Зоммерфельд в своей „Механике" называет Гюйгенса „крупным ученым XVII в. и гениальнейшим часовым мастером всех времен" (Зоммерфельд. Механика. Пер. Т. Е. Тамм, М., 1947, стр. 130).

** Здесь уместно вспомнить, что и Ньютон гордился тем, что мог кое-чему научить лондонских мастеров в искусстве полирования зеркал.

*** Commentarii De formandis poliendisque vitris. Christiani Hugenii opuscula postuma, Luqduni Batavorum, 1703, pp. 267—290.

Несколько подробнее остановимся и дадим пояснения о каждом из трех мемуаров Гюйгенса, составляющих данную книгу. Эти мемуары приведены здесь в той последовательности, в которой они увидели свет: сначала помещены „Маятниковые часы“ появившиеся в 1673 г., затем мемуар „О движении тел под влиянием удара“ и, наконец, „О центробежной силе“, напечатанные в 1703 г. В настоящей статье мы начнем с пояснений к мемуару „О движении тел под влиянием удара“.

Актуальность и практическая важность изучения соударения тел ясна всякому. В XVII в. академии и отдельные ученые неоднократно ставили на очередь этот вопрос. Известно, что Галилей очень интересовался большими силами, развивающимися при ударе, и не имел решения для расчета этих сил. Это также было неясно и Гюйгенсу. Теорема об импульсе силы могла быть сформулирована только на основании законов Ньютона. Возможно, что неясность в этом вопросе задерживала напечатание работы, давно законченной Гюйгенсом.

Второе обстоятельство, которое необходимо отметить, — это отсутствие в XVII в. отчетливого различения таких понятий, как упругость, неупругость, твердость. Гюйгенс пишет о твердых телах, но результаты его относятся к телам упругим. Теория соударения абсолютно твердых тел представляет еще и до сих пор непреодоленные трудности. Любопытно, что на необходимость замены слова „твердый“ словом „упругий“ указал Ньютон в своих „Началах“.

Главнейшие этапы работы Гюйгенса над вопросом о соударении тел и история напечатания его статей устанавливаются достаточно точно по сохранившимся письмам и рукописям.

По письмам 1652 г.* видно, что в это время Гюйгенс уже совершенно ясно понимал ошибочность утверждений

* Письмо к Гутеховену от 17 января 1652 г. и к Схоутену от 29 октября 1652 г.

Декарта относительно удара тел и сам успешно разобрался в разных случаях упругого удара.

Сохранившаяся рукопись 1652 г. показывает, что Гюйгенс в это время уже открыл основные методы, при помощи которых он разрешил задачу об упругом ударе, а именно: 1) применение принципа относительности движения, 2) теорему об одинаковости относительной скорости сближения тел до удара и относительной скорости удаления тел после удара и 3) то, что можно назвать гюйгенсовской формой теоремы живых сил.

Переписка следующих лет* и черновые рукописи показывают, что Гюйгенс не перестает заниматься вопросом об ударе тел и уже рассмотрел его во всех деталях.

1656 г. Гюйгенс приводит в порядок аксиоматику своей работы, т. е. определяет исходные гипотезы и располагает также в порядке отдельные доказуемые предложения (теоремы) и вспомогательные леммы. 20 июля 1656 г. Гюйгенс пишет Робервалю: „Уже несколько времени, как я оставил всякие другие занятия и занимаюсь только вопросом об ударе тел. Как мне кажется, я Вам говорил однажды, как неудачно занимался этим вопросом Декарт. Несколько дней тому назад я закончил свое маленькое исследование, в котором, как я полагаю, показано, что Декарт мог ошибаться в физике не менее, как в геометрии“.

Таким образом, трактат Гюйгенса должен быть в основном отнесен к 1656 г. (или ранее того). К этому времени в распоряжении Гюйгенса уже были все необходимые предпосылки и доказательства. Все дальнейшие изменения носят характер редакционных поправок. Сохранившаяся рукопись „Об ударе“, с которой печатали мемуар профессоры де Фолдер и Фуллениус, несомненно более позднего времени и во всяком случае относится к периоду после 1673 г., т. е.

* Письма к Киннеру от 16 декабря 1653 г., к Схоутену (1654 г.), к Милону (1656 г.); переписка с де Слюзом (1656 и 1657 гг.).

после напечатания трактата „Маятниковые часы“, как это видно из самой рукописи.

Сохранившиеся многочисленные черновики и наброски предисловия (незаконченного) показывают, что Гюйгенс не оставлял мысли напечатать свой трактат. Однако он не привел в исполнение своего намерения, и рукопись увидела свет только после его смерти.

22 января 1661 г. Гюйгенс объяснял свои законы соударения упругих тел в известном салоне де Бонво, в котором обсуждались научные и литературные вопросы.

23 апреля 1661 г. (по записи в дневнике Гюйгенса) в Лондоне в его комнате собрались после обеда члены Королевского общества Морей (Moray), лорд Бронкер (Brouncker) — президент Королевского общества, Ниль (Neile), Уоллис (Валлис, Wallis), Рук (Rooke), Рен (Wren) и Годдард (Goddard); Гюйгенс изложил им свой метод изготовления оптических стекол. Тут же Гюйгенс решал различные случаи соударения тел.

Об этом заседании имеется свидетельство Морея, о нем же говорится в письме секретаря Королевского общества Ольденбурга к Спинозе. В письме указан и произведенный опыт, результат которого был предвычислен Гюйгенсом, и другие подобные опыты, предложенные Бронкером и успешно вычисленные Гюйгенсом.

Гюйгенс доложил полученные им результаты Парижской академии наук на трех заседаниях (4, 11 и 18 февраля 1668 г.).

С осени 1666 г. вопрос о соударении тел неоднократно обсуждался в Лондонском королевском обществе, которое, наконец, в заседании 22 октября 1668 г. постановило обратиться к Гюйгенсу и Рену как к лицам, наиболее осведомленным в этой области, с просьбой сообщить обществу свои результаты. Несколько позднее (22 ноября 1668 г.) общество постановило обратиться с тем же вопросом к Уоллису (Валлису).

Гюйгенс в ответ на предложение попросил указать, какой области движения он должен прежде всего коснуться. Он перечисляет эти области: падение весомых тел без сопротивления воздуха и с сопротивлением воздуха, движение маятников, центры колебаний, движение круговое и коническое, центробежная сила и, наконец, движение тел при ударе. Гюйгенс соглашается изложить свои правила и теоремы и просит сообщить ему, что найдено другими учеными, занимавшимися теми же вопросами.

Валлис первый дал ответ на запрос Королевского общества. Он разобрал случай неупругого удара. Вторым был Рен. Его ответ поступил 17 декабря 1668 г. Ответ Гюйгенса поступил 7 января 1669 г. Оба они разбирают удар упругих тел и их правила вычисления скоростей совпадают. Однако у Рена не представлено никаких доказательств его результатов. Ответ Гюйгенса значительно полнее других ответов и содержит указание основных гипотез и доказательства теорем (хотя и неполные и с пропуском некоторых теорем). Гюйгенс просит Королевское общество высказать свое суждение о его доказательствах.*

На заседании 17 декабря 1668 г. Рен заявил, что правила расчета упругого удара были ему известны еще в эпоху возникновения Королевского общества (около 1650 г.).** Это заявление подтвердили Ниль (Neile), Болл (Ball) и Хилл (Hill).

Немецкий комментатор Гюйгенса Гаусдорф*** утверждает,

---

* Ольденбург сообщил Гюйгенсу благоприятное мнение Королевского общества и его президента Бронкера о его трактате.

** Королевское общество официально организовалось в 1660 г., но неофициальные собрания ученых в доме доктора Годдарда начались с 1649 г.

*** Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. № 138. Christian Huygens nachgelassene Abhandlungen. Über die Bewegung der Körper durch den Stoss. Über die Centrifugalkraft. 1903. Указанное утверждение высказано на стр. 63—64.

что Рен впоследствии признал, что не мог придумать доказательства своим правилам.

7 января 1669 г., в день получения Королевским обществом и прочтения ответа Гюйгенса, общество постановило напечатать статью Рена в журнале общества „Philosophical Transactions". Рукописная копия статьи Рена была послана Гюйгенсу, и он ответил благодарностью, сообщив, что правила Рена совпадают с его собственными и несомненно правильны.

Каково же было удивление Гюйгенса, когда он получил январский номер „Philosophical Transactions" со статьями Рена и Уоллиса, но не нашел не только своей статьи, а и вообще никакого намека на его работу.

В сопроводительном письме Ольденбурга было сказано, что статья Гюйгенса не напечатана, так как Гюйгенс не дал разрешения на напечатание и не составил оглавления. Однако, как справедливо заметил Гюйгенс в ответ на письмо Ольденбурга (см. далее), редакция могла и без разрешения Гюйгенса сообщить, что решение вопроса, представленное Гюйгенсом Королевскому обществу, в основном совпадает с решением Рена.

Отчасти сознание несправедливого отношения к нему Королевского общества, отчасти желание избегнуть впечатления, будто его взгляды образовались под влиянием взглядов Рена, побудили Гюйгенса написать статью в „Journal des savants"* с изложением результатов своих исследований, однако без доказательств последних.

После появления этой статьи в печати Гюйгенс написал три письма: одно — Ольденбургу, в котором он жалуется на несправедливость Ольденбурга по отношению к нему, однако в очень осторожных выражениях; другое — Морею, составленное в несколько более решительных выражениях,

* Regles du mouvement dans la rencontre des corps. Journal des Sçavans, Paris, le 18 mars 1669, pp. 19—24.

и, наконец, третье, — Дюгамелю, который в то время жил в Англии, с просьбой быть его представителем в Англии, так как он, Гюйгенс, в этом очень нуждается.

Дюгамель имел два разговора с Ольденбургом. Ольденбург в ответе Гюйгенсу решительно защищается от обвинения в несправедливости. Одновременно он сообщает, что перевод статьи Гюйгенса в „Journal des savants“ появится в апрельском номере „Philosopical Transactions“. И действительно, апрельский номер 1669 г. содержит перевод статьи Гюйгенса в „Journal des savants“,* однако без абзаца, предшествующего „Правилам движения“, и без абзаца, заканчивающего статью, в котором Гюйгенс защищается от подозрения в заимствовании своих „Правил движения“ и рассказывает об упомянутом выше заседании в комнате Гюйгенса в Лондоне в 1661 г.

Морей ответил Гюйгенсу очень любезным письмом, в котором пишет, что лица, бывшие в 1661 г. свидетелями того, с какой легкостью и точностью он немедленно объяснил несколько опытов, перед тем произведенных, пользуясь вполне разработанной системой правил, никогда не откажутся подтвердить, что ему принадлежит честь открытия законов удара. „Но, — добавляет Морей, — случается иногда, что разные лица делают то же открытие, пользуясь различными методами. В этом случае честь открытия может быть приписана обоим, без ущерба для каждого из них“.

Заметим в заключение, что Ньютон в своих „Математических началах естественной философии“ ссылается на работы Уоллиса, Рена и Гюйгенса.** Ссылка эта сделана по поводу

---

* The laws of motion on the collision of bodies. Phil. Trans. Roy. Soc. of London, 4, April 12, 1669, pp. 927—928.

** Исаак Ньютон. Математические начала естественной философии. Пер. акад. А. Н. Крылова. Собр. трудов акад. А. Н. Крылова, т. VII, Изд. АН СССР, 1936. Указанная ссылка находится на стр. 51—54.

проверки Ньютоном своего третьего закона движения при помощи соударений шаров-маятников.

Мы изложили подробно все события, связанные с представлением Гюйгенсом мемуара „О движении тел под влиянием удара" в Лондонское королевское общество, не потому, что они важны сами по себе, а потому, что они говорят о попытке этого общества умолчать о работах Гюйгенса.

Перехожу к мемуару о центробежной силе.

Некоторые теоремы о центробежной силе Гюйгенс еще в 1669 г. сообщил Лондонскому королевскому обществу в виде анаграммы.

Мемуар о центробежной силе также был написан еще до выхода в свет „Маятниковых часов". В конце „Маятниковых часов" Гюйгенс дает без доказательства тринадцать теорем относительно центробежной силы, возникающей при круговом движении. Эти тринадцать теорем охватывают все детали, характеризующие центробежную силу, вплоть до расчета натяжения нити маятника. Все они укладываются в формулу $f=\frac{mv^2}{r}$, которую Гюйгенс прямо не пишет, но которая ясно следует из его выводов, если пользоваться понятием „массы". Эти теоремы произвели большое впечатление на современников. В частности Ньютон обратил внимание на теоремы о центробежной силе и в особенности на сопоставление центробежных сил с тяжестью.*

В своем похвальном отзыве о „Маятниковых часах" Ньютон пишет, между прочим: „Я рад тому, что мы можем ждать еще мемуара о центробежной силе, который может оказаться чрезвычайно полезным для естественной философии и астрономии, а также для механики". Ньютон несомненно использовал результаты исследований Гюйгенса, о центробежной силе, но поставил вопрос на широкой базе общего

---

* Исаак Ньютон. Математические начала естественной философии. Пер. акад. А. Н. Крылова. Собр. трудов акад. А. Н. Крылова, т. VII, Изд. АН СССР, 1936. Указанное место находится на стр. 79.

рассмотрения центральных сил. У Гюйгенса же интерес к круговому движению возник, вероятно, главным образом в связи с требованиями астрономии и точного приборостроения (приспособление конического маятника к часам). Следует заметить, что некоторое представление о центробежной силе существовало до Гюйгенса у нескольких лиц: прежде всего Галилей, Кеплер и Декарт высказали несколько здравых мыслей о вращательном движении. Галилей объясняет то обстоятельство, что тела не отлетают от поверхности Земли при вращении последней. Он говорит, что при той же поступательной скорости стремление отлететь тем меньше, чем меньше касательная отступает от дуги, т. е. чем больше радиус.

Кеплер в „Epitomae Astronomiae copernicanae“ опровергает мнение, будто при вращении Земли тела на земной поверхности должны выбрасываться в воздух, как грязь с обода вращающегося колеса. Происходит это потому, что земные предметы привязаны к земле притягательной способностью. Никакой меры этой „способности“ он не пытается найти.

Декарт неоднократно рассматривает движение камня в праще. Он исходит из двух положений:

1) всякий предмет остается в том состоянии, в каком он находится, если на него нет никаких воздействий;

2) каждая часть движущейся материи всегда стремится продолжать движение прямолинейно. Этим он объясняет давление на руку, вращающую пращу и заставляющую камень двигаться по окружности.

Гюйгенс нашел оригинальный подход для количественного рассмотрения величины и направления центробежной силы. Он рассматривает движение отлетающего по касательной камня с точки зрения наблюдателя, совпадающего с „ободом колеса“ и вращающегося вместе с ним. Это рассмотрение относительного движения позволяет ему ясно и просто дать направление и количественные зависимости для центробежной силы.

Немецкий комментатор Гюйгенса, отмечая это обстоятельство, пишет, что, читая Гюйгенса, удивляешься тем трудностям, которые были впоследствии нагромождены около центробежной силы. Мнение это, как нам кажется, нуждается в оговорке. Смелое решение Гюйгенса отчасти связано с тем, что он не имел в своем распоряжении ни законов Ньютона, ни тем более принципа Даламбера.

Вопрос о силах инерции, о реальных и фиктивных силах, для него просто не существовал. Если бы он знал те подводные камни, которые его окружают, он, весьма вероятно, испытал бы бо́льшие затруднения в обосновании своего вывода.

Необходимо отметить полноту рассмотрения вопроса о центробежной силе у Гюйгенса. Его 17 теорем охватывают вопрос во всех деталях. Особенно важно сопоставление с тяготением. Здесь уместно указать на некоторые общие взгляды Гюйгенса. Вопрос о покое и движении занимал Гюйгенса в течение всей его жизни. Имеется много заметок его по тому поводу. Идея относительности (в классическом смысле, конечно) была ему чрезвычайно близка. Он не только использовал ее для доказательств в своих мемуарах, но возвращается к ней часто в рассуждениях. Когда Мариотт предложил различать „относительную“ скорость (vitesse respective) и „истинную“ или „собственную“ скорость (vitesse propre), Гюйгенс выступил с возражением, что существует только относительная скорость. „Движение между телами только относительно“.* В переписке с Лейбницем Гюйгенс утверждает относительный характер вращения.

Гюйгенс придерживается, конечно, системы Коперника, но без признания неподвижности Солнца и без признания сферы звезд. Идеей абсолютного пространства Гюйгенс не пользуется. По поводу абсолютного пространства Ньютона Гюйгенс делает заметку: „Ita omnis vulgo et aussi Newton“,

* „Motus inter corpora relativum tantum est“.

что можно перевести: „Так думают все и также Ньютон“. Нельзя не отметить несколько недружелюбный стиль этой полулатинской, полуфранцузской заметки.

Гюйгенс признавал бесконечность пространства, а также пустоту. Впрочем, как картезианец, он под пустотой понимал пространство, освобожденное от „обыкновенной“ материи. Заполнение пространства эфиром оставалось. (Отвлекаясь в сторону, следует указать, что Гюйгенс экспериментировал с воздушным насосом, изобретал приборы и руководил работой других ученых. Книга Папена „О пустом пространстве“ посвящена Гюйгенсу, и автор указывает, что почти все опыты сделаны по идее Гюйгенса и под его руководством. В частности Гюйгенсом изобретены тарелка насоса, колокол и манометр).

Переходим к третьему по времени написания мемуару Гюйгенса — „Маятниковым часам“. Он увидел свет ранее рассмотренных первых двух мемуаров. В „Маятниковых часах“ гений Гюйгенса проявился особенно ярко. Это одна из самых замечательных книг по механике, написанных в XVII в., которая „является прекрасным звеном между «Discorsi» Галилея и «Principia» Ньютона“.* Содержание мемуара гораздо шире его названия, хотя и страницы, посвященные собственно часам, прекрасны. Несомненно изобретение маятниковых часов составляло целую эпоху в науке и технике. Но сверх того в книге сделано много различных открытий и изобретений в самых разнообразных отраслях математики, физики, механики. Чтобы оценить обилие этих открытий и изобретений, содержащихся в „Маятниковых часах“, достаточно перечислить главнейшие из них:

1) изобретение обыкновенных маятниковых часов;
2) изобретение часов с коническим маятником;
3) открытие явления принудительного консонанса хорошо

* С. И. Вавилов. Гюйгенс. Большая советская энциклопедия, 1-е изд., 1930, т. 20, стр. 84.

настроенных маятников, играющего очень большую роль в современных радиоустановках;*

4) открытие свойств циклоидального маятника, обладающего периодом независимым от амплитуды;

5) решение вопроса о таутохроне;

6) решение вопроса о периоде циклоидального маятника и вместе с тем о периоде математического маятника при бесконечно малой амплитуде;

7) создание совершенно нового учения об эволютах и эвольвентах, представляющего важную главу в современной дифференциальной геометрии;

8) выпрямление очень многих кривых линий, вычисление площадей кривых поверхностей и определение эволюты и эвольвенты для многих классов кривых.

Все эти многочисленные открытия носят, однако, только подготовительный характер к содержанию четвертой части мемуара, посвященной вопросу о физическом маятнике. В этой части Гюйгенс впервые и притом полностью и верно решает вопрос большой теоретической и практической важности: он вводит понятие центра качания физического маятника и дает общий метод его определения, метод, который можно назвать методом геометрического интегрирования.

История того, каким образом Гюйгенс принялся за решение этой задачи, характерна для науки того времени и заслуживает хотя бы краткого упоминания. В то время научных журналов было очень немного и общение ученых и распространение научных достижений в значительной мере шло путем переписки. Среди ученых, сыгравших большую роль в организации науки в первой половине и в середине XVII в., следует указать замечательного французского ученого Мерсенна. Мерсенн очень много сделал для содействия научной работе и информации ученых о результатах, добытых другими

* Н. Д. Папалекси. Современное развитие понятий о резонансе. „Успехи физических наук“, 1947.

учеными. Следует также указать и то обстоятельство, что до начала официального образования Французской академии наук в Париже существовали собрания ученых, организованные, по инициативе Мерсенна. Мерсенн был в переписке, между прочим, и с отцом Гюйгенса. Он знал о выдающихся способностях молодого Гюйгенса. Когда Гюйгенсу было всего 15 лет, Мерсенн предложил нескольким ученым, в том числе Декарту, Робервалю и молодому Гюйгенсу, решить задачу о физическом маятнике для некоторых частных случаев. Мерсенн даже назначил премию победителю в этом соревновании. У Гюйгенса тогда ничего не вышло, „но,— замечает он в своем мемуаре,— немного вышло и у других лиц, приглашенных к участию в решении задачи". Зато впоследствии Гюйгенс блестяще решил поставленный ему Мерсенном вопрос, и не только в частном случае, но и в самой общей форме.

Решение задачи о физическом маятнике, несомненно, представляет эпоху в развитии механики. Это первый случай решения вопроса из механики системы точек и твердого тела. Впервые введена величина, пропорциональная моменту инерции. Для нас интересен также и тот метод, которым шел Гюйгенс при решении своей задачи. В основу решения он положил „энергетический принцип", формулированный следующим образом: „Система весомых тел, движущихся под влиянием силы тяготения, не может двигаться так, чтобы общий центр тяжести тел поднялся выше первоначального положения". Гюйгенс считал это положение само собой разумеющейся аксиомой, выражением той мысли, что весомые тела не могут двигаться вверх без внешнего воздействия. Из этого положения он непосредственно выводил свое предложение IV, которое гласит: „Если маятник, состоящий из многих весомых частиц, свершив часть колебаний, ударится о плоскость и распадется на все его составляющие частицы, и эти частицы будут двигаться вверх до той высоты, до которой могут при приобретенной скорости, то центр тяжести общий поднимется на ту же высоту, на которой он был до начала колебания маятника".

Уже следующее предложение V приводит Гюйгенса к правильному выражению для приведенной длины физического маятника.

При своем рассуждении Гюйгенс неоднократно пользуется положением о невозможности вечного двигателя — „perpetum mobile".

После того как Гюйгенс нашел выражение для приведенной длины физического маятника, следует еще обширная математическая часть, в которой Гюйгенс правильно вычисляет и центр тяжести и центр качания для очень многих весомых линий, плоскостей и тел. В его работе заключается также очень точное, для его времени, определение ускорения силы тяжести и предложение международной меры длины, „часового фута", составляющего $^1/_3$ длины секундного маятника.

Мемуар Гюйгенса „Маятниковые часы" очень быстро получил известность и заслужил всеобщее признание. Ньютон, получив экземпляр „Маятниковых часов", пишет, что познакомился с книгой с большим удовлетворением, так как нашел в ней много тонких и полезных рассуждений, вполне достойных ее автора. В своих „Началах" Ньютон называет мемуар о маятниковых часах превосходным. Столь же хвалебны были и отзывы других выдающихся современников Гюйгенса. Была и критика отдельных положений. Так, например, Ньютон критиковал теоремы Гюйгенса, в которых рассматривается падение тела вдоль ряда наклонных плоскостей, имеющих профиль в виде ломаной линии. Он считал, что Гюйгенс не учел влияния, которые могут иметь изломы на движение, и считал вывод убедительным только для предела, когда ломаная превращается в кривую. Первая развернутая критика принадлежит, повидимому, Робервалю.

Возражения Роберваля, относящиеся к 1670 г., свидетельствуют о том, что Гюйгенс еще до выхода книги в свет докладывал в Парижской академии наук некоторые части книги, или, может быть, результаты без выводов, а также и исходные гипотезы своих рассуждений. Эти гипотезы и вызвали возражения Роберваля. Труды Роберваля по механике, которые при жизни его никогда не были напечатаны, до настоящего времени не сохранились.* Сохранились, как возражения Роберваля, так и ответы на них Гюйгенса. Возражения очень мало интересны и свидетельствуют скорее о том, что Роберваль был плохой механик-теоретик. Так, например, он не воспринял закона инерции, хотя жил после Галилея и Декарта. Некоторые вопросы совершенно нелепы и вызвали иронические реплики Гюйгенса. Самое серьезное возражение заключается в том, что Гюйгенс сделал свои выводы для центра удара, а потом приложил их к центру качаний, который Роберваль считает совпадающим с центром удара.

Можно показать, что центр удара при известном определении совпадает с центром качания.

Однако ни в книге Гюйгенса, ни в сохранившихся рукописях, нигде нет указаний на то, что Гюйгенс пришел к понятию о центре качания через понятие о центре удара. Гораздо более вероятно, что дело обстояло не так и что Гюйгенс высказал свою гипотезу самостоятельно. Тем не менее нельзя отрицать того факта, что Гюйгенс был знаком с работой Мунье и в особенности Фабри, на которых следует указать, хотя и с большими оговорками, как на предшественников Гюйгенса в этом трудном учении.

На других возражениях Роберваля не стоит останавливаться.

Через восемь лет после появления мемуара возникла полемика, связанная с аксиомой Гюйгенса о движении центра тяжести системы весомых тел. „Энергетическая“ точка зре-

---

* В 1650 г. Роберваль пишет Гевелиусу, что он кончил трактат по механике в 8 книг, из которых последняя трактует о центре удара.

ния Гюйгенса не была понятна всем его современникам. Гравезанд в „Christiani Hugenii opera varia“ опубликовал и эту полемику. Против Гюйгенса выступил аббат Кателан* со следующим заявлением: „Движение тел, свободно падающих, и движение тел, связанных в общий физический маятник, происходит по разным физическим законам. Если два шара, находящиеся на разных расстояниях от оси вращения маятника, падают вместе, соединенные невесомым стержнем, то волей-неволей их скорости пропорциональны расстояниям от оси вращения, а следовательно, и высотам падения. Если же с тех же мест и до той же наклонной плоскости будут падать несвязанные частицы, то их скорости пропорциональны корням квадратным из высот падения, как показал Галилей. Поэтому в предложении IV Гюйгенса отдельные частицы, составляющие физический маятник, которые, совершив часть колебаний, ударяются о плоскость, разбиваются на отдельные частицы и потом поднимаются наверх, будут двигаться разно при своем падении как физический маятник и при своем подъеме, когда они двигаются, как отдельные частицы. Поэтому высота, на которую поднимется центр тяжести, не может быть той же самой, на которой она находилась до начала колебания“.

К этому положению аббат Кателан присоединял еще два неправильных требования.

Во-первых, сумма скоростей всех частиц, составляющих физический маятник (предполагая их одинаковыми), должна равняться сумме скоростей всех частиц, двигающих вверх после соударения. В этом утверждении аббата Кателана чувствуется влияние картезианской философии.

Правило, данное Гюйгенсом для определения центра качания, Кателан заменяет своим положением 2-м, которое гласит: „Период физического маятника есть среднее арифметическое из периодов простых математических маятников,

* Кателан не был авторитетным ученым. В полемике, начатой им, приняли участие более авторитетные ученые.

которые составляют отдельные частицы физического маятника, двигающиеся вокруг общей оси".

В полемике, которая растянулась на несколько лет, приняли участие, кроме аббата Кателана, выступавшего много раз, еще Яков Бернулли, выступивший два раза, и математик Лопиталь. Бернулли, во всем признавая правильность точки зрения Гюйгенса, все-таки стремился заменить явно чуждую ему аксиому Гюйгенса каким-либо другим положением. Его точку зрения можно сформулировать так: представим себе для простоты физический маятник, состоящим из двух весомых точек, расположенных на разных расстояниях от оси вращения и соединенных невесомым стержнем. Если отвести маятник в горизонтальное положение, то обе весомые точки, если бы они были свободны, стремились бы падать с одинаковой скоростью. Если же они связаны невесомым стержнем, то поневоле точка, более близкая к оси, двигается медленней, а точка более далекая, — скорей. Следовательно, должно быть какое-то торможение весомой точки, более близкой к оси, и, с другой стороны, это торможение должно вызвать ускоряющую реакцию на более далекую точку. Бернулли попытался из этого вычислить период маятника. В результате он разошелся с Гюйгенсом и пришел к выводу, который, несомненно, привел бы к вечному двигателю.

Бернулли это почувствовал, но пишет, что можно не опасаться такого результата, так как всегда существующие помехи и трение ослабят поднятие и дадут возможность избежать вечного двигателя.

Лопиталь нашел ошибку в расчете Бернулли и показал, что для рассмотренного простого частного случая расчет Бернулли приводит к тому же результату, что и расчет Гюйгенса. Однако метод Гюйгенса значительно превосходит метод, предложенный Бернулли, по своей общности.

Гюйгенс в этой полемике выступал три раза. Он показал, что оба предположения Кателана, и о сумме скоростей и о среднем периоде, приводят к тому, что центр тяжести распавшегося на частицы маятника поднимается выше своего первоначального положения, и, следовательно, противоречат основной аксиоме Гюйгенса. Кроме того, эти высоты поднятия в обоих предположениях разные и показывают, что оба принципа еще друг другу противоречат.

Далее Гюйгенс в очень корректной форме, но очень решительно осуждает Бернулли за непринципиальное отношение к вопросу о вечном двигателе и легко показывает несостоятельность его компромиссного рассуждения.

В заключение Гюйгенс пишет: „Очевидно маятник теряет в скорости, понимая это в том смысле, как говорит Кателан, но сохраняется подъемная сила, которая зависит в этом случае, как и во многих других случаях, от квадратов скоростей". Таким образом, он закончил полемику опять-таки „энергетическими" соображениями. Победа в полемике, как и следовало ожидать, оказалась на стороне Гюйгенса.

Яков Бернулли продолжал заниматься попыткой нахождения центра качания по своему методу („метод рычага") и впоследствии. Так, в 1691 г. он мог дать правильный вывод для прямой весомой линии и, наконец, в 1703 г. ему удается формулировать принцип, похожий на принцип Даламбера, дающий решение в общем случае. Этот способ уже можно считать равноценным способу Гюйгенса. Таким образом, остается в силе утверждение, что общий вывод Гюйгенса был при его жизни единственным существовавшим.

Заметим в заключение, что любимым ученым Гюйгенса был Архимед. Не случайно его отец, говоря в письмах к друзьям о своем сыне, называет его „мой Архимед". Но начав с проблем древности, с гидростатики и квадратуры круга, проблем, которые продолжали его интересовать всю жизнь, этот геометр XVII в, дошел в своих исканиях до „энергетических" соображений и до открытия многих тонких явлений, вроде принудительного консонанса.

В заключение сообщаю сведения об источниках, которыми я пользовался.

Перевод „Маятниковых часов“ сделан по парижскому изданию 1673 г.,* единственному, вышедшему при жизни Гюйгенса. Я использовал также издание Гравезанда,** в которое Гравезанд ввел некоторые поправки на основании заметок, сделанных Гюйгенсом на своем экземпляре. Очень многое я заимствовал из многотомного собрания сочинений Гюйгенса, изданного Голландским обществом наук.*** Это издание снабжено обширным и очень серьезным комментарием и, что особенно ценно, содержит в себе обширную переписку Гюйгенса, а также изложение полемик, вызванных работами Гюйгенса. Немецкое издание „Маятниковых часов“ не отличается точностью перевода и содержит многие „модернизации“.**** Исторический комментарий его также устарел, но математический использован в настоящем томе.

Перевод мемуаров „О движении тел под влиянием удара“ и „О центробежной силе“ сделан по первому посмертному изданию, вышедшему в Лейдене в 1703 г. под редакцией профессоров Б. де Фольдера и Б. Фуллениуса.***** И при этом переводе я пользовался комментариями „Собрания сочинений“ Гюйгенса, изданного Голландским обществом наук. Относительно немецкого перевода ****** этих мемуаров приходится повторить то же, что сказано о немецком переводе „Маятниковых часов“. Перевод не точен и модернизирован. Исторический комментарий устарел и частью не верен. Математический комментарий использован в настоящем издании.

---

* Christiani Hugenii Horologium oscilatorium. Parisiis, 1673.

** Christiani Hugenii opera varia. Lugduni Batavorum, 1724.

*** Oevres Complètes de Christiaan Huygens. La Haye.

**** Die Pendeluhr von Christiaan Huygens. Herausgegeben von A. Heckscher und A. v. Oettingen. — Ostwald's Klassiker, № 192, Leipzig, 1913.

***** Christiani Hugenii opuscula postuma. Lugduni Batavorum, 1703.

****** Christian Huygens nachgelassene Abhandlungen. Über die Bewegung der Körper durch den Stoss. Über die Cenrifugalkraft. Herausgegeben von Felix Hausdorf. Ostwald's Klassiker, № 138, Leipzig, 1903.

В своем переводе я строго придерживался подлинника и, в особенности, старался соблюдать способ рассуждения Гюйгенса, не позволяя себе подмены понятий, которыми пользовался автор, более современными.

Единственное отступление от подлинника, которое я себе позволил, касается написания формул. В этом случае соблюдение старинного способа написания, так же как и манера излагать действие словесно, излишне затруднило бы чтение. Но и в этом случае я стремился к тому, чтобы не нарушить ни в чем рассуждений автора.

К. К. Баумгарт.

ПРИМЕЧАНИЯ

К мемуару „Маятниковые часы“

[1] На титульном листе (см. вклейку) издания 1673 г. значится:

Христиан Гюйгенс, сын Константина,
из Зейлихема
Маятниковые часы
или
Геометрические доказательства,
относящиеся
к движению маятников, приспособленных * к часам

Париж
В типографии Ф. Мюге, печатника короля и светлейшего архиепископа
на улице Гитары, под вывеской трех волхвов.
1673
С привилегией короля

На обороте титульного листа помещен следующий текст:

Эта книга разделена на 5 частей, из которых

Первая содержит описание маятниковых часов.

Во второй разбирается падение весомых тел и их движение вдоль циклоиды.

В третьей излагается учение об эволютах и о размере кривых линий.

В четвертой — учение о центре качания или возмущения.

Пятая дает описание часов другого устройства, в которых маятник совершает круговое движение, и теоремы о центробежной силе.

[2] Гюйгенс пишет: „Идет шестнадцатый год“. Голландский патент на изобретение маятниковых часов Гюйгенс получил 16 июня 1657 г. Брошюру „Horologium“ он напечатал в 1658 г.

---

* Дословно: „к движению маятников, приспособленному к часам“.

[3] Действительно, Гюйгенс первый изучил развертки кривых и, таким образом, является творцом всей теории эволют и эвольвент.

[4] Неизвестно, какие книги (или книгу) имеет в виду Гюйгенс. Возможно, что это книга Корнелия Мальвазии (Cornelio Malvasia. Ephemerides novissimae motuum coelestium. 1662). В ней содержится неопределенное указание на часы с маятником, изобретенные якобы несколько лет тому назад во Флоренции, но без ссылки на Галилея.

[5] Имеется в виду Вивиани. (1622—1703). Опубликованная в Oeuvres complétes переписка Гюйгенса с французским астрономом Буйо показывает, что в 1660 году (два года спустя после изобретения им часов) Гюйгенс познакомился с неосуществленным проектом Галилея.

[6] Это означает, что полупериод маятника равен 1 секунде.

[7] Введение единой меры было предложено еще в 1670 г. Габриэлем Мутоном (1618—1694). Он предложил 1 минуту меридианного круга, что соответствует 1.85 км.

[8] Гюйгенс дает очень точное соотношение.

[9] Это определение очень точно $34:29 = 1.172$. Истинное значение равно 1.180, т. е. ошибка равна всего 0.8%. Немецкие комментаторы Гюйгенса Гекшер и Еттинген,* отмечают, что Гюйгенс не указывает, как он нашел свой результат, и что полное аналитическое решение вопроса удалось только Эльвиусу в 1734 г. при помощи эллиптического интеграла.

Однако в голландском издании „Oevres complètes de Christiaan Huygens“, в томе XVIII (издан в 1934 г.) на стр. 374—387 приведен геометрический расчет Гюйгенса, из которого видно, что Гюйгенс умел находить очень близкий нижний предел отношения колебаний для любых дуг; приведены его расчеты и сравнены с расчетами Эльвиуса и Эйлера. Видно, что позднее Гюйгенс улучшил свой результат и получил более точное число 1.18033... вместо 1.172...

Видно также, что открытие Гюйгенсом таутохронизма циклоиды связано именно с этими рассуждениями (см. по этому поводу также „Oevres complètes de Christiaan Huygens“, XVI, стр. 392—397).

[10] Так высказывался Мерсенн в предисловии к „Cogitata physicomatematica“, 1644.

[11] У циклоидального маятника имеются свои недостатки, которые перевешивают его преимущества. Трудно придать щекам точную кривизну циклоиды; нити вследствие жесткости не вполне прилегают к щекам, так что груз маятника не движется по циклоиде. Относительно большие размахи связаны с заметным сопротивлением воздуха. Поэтому

---

* A. Heckscher u. A. V. Oettingen. Die Pendeluhr. Horologium oscillatorium von Christiaan Huygens, Leipzig, 1913.

теперь применяют только круговые колебания с малыми амплитудами. Для них зависимость периода от амплитуды ничтожна.

[12] В 1678 г. некий де Вомель показал, что эволютой кардиоиды являющейся одной из эпициклоид, является опять кардиоида тройного размера. В конце того же 1678 г. он же показал, что эволютой любой эпициклоиды является подобная эпициклоида. В 1692 г. Яков Бернулли показал, что тем же свойством обладает логарифмическая спираль, которая может дать и подобную логарифмическую спираль. Яков Бернулли указывает, что это было известно его брату Ивану Бернулли.

В 1727 г. Крафт опубликовал в „Комментариях Петербургской Академии" статью, в которой доказал, что циклоиды и логарифмическая спираль с постоянным углом 45° суть единственные линии, воспроизводящие сами себя, и что другие логарифмические спирали, эпи- и гипоциклоиды суть единственные линии, дающие подобные эволюты. Позднее вопрос был обобщен Эйлером в двух работах 1750 и 1787 гг. Крафт неправильно приписывает Чирнгаузену приоритет в смысле занятия эпи- и гипоциклоидами.

[13] Приводим доказательство построения (по немецкому комментарию). Проведем касательную через A и примем ее за ось x, а AB — за ось y. Средину круга назовем M.

Пусть EI пересекает AB в L, тогда $SL = x$ — абсцисса точки S, $AL = y$ — ордината. Пусть радиус круга r. Угол $AME = \varphi$, тогда

$$AE = ER = IS = r\varphi$$

и из $\triangle LME$ следует:

$$LE = LI = r \sin \varphi,$$

$$ML = r \cos \varphi,$$

следовательно,

$$x = SL = SI = IL = r(\varphi - \sin \varphi),$$

$$y = AL = MA - ML = r(1 - \cos \varphi).$$

Это уравнение циклоиды, получающейся при качании круга по касательной, проходящей через A.

[14] В мемуаре Гюйгенса „О нахождении величины круга" („De circuli magnitudine inventa", 1654). См. выше в биографии Гюйгенса.

[15] Об уравнении времени. Мы теперь под уравнением времени понимаем разность: среднее солнечное время минус истинное солнечное время. Гюйгенс под уравнением времени понимает разность — истинное солнечное время минус среднее солнечное время. Пересчет, сделанный П. Бруна по новейшим данным, показывает очень большую точность таблицы, вычисленной Гюйгенсом, см. „Oevres complètes ...", t. XVIII, p. 51, 1934.

[16] Гюйгенс пишет „уравнение дней“ вместо „уравнения времени“. Мы сохранили это название в заголовке таблицы.

[17] Александр Брюс.

[18] Действительная разность 19°13′, т. е. на 1°17′ меньше, чем указывает Гюйгенс. Из комментария „Oevres complètes...“ видно, что „опытным астрономом“ был Делавуа.

[19] Действительные разности дают 6°7′ (на 13′ меньше, чем у Гюйгенса) и 15°45′ (на 41′ меньше, чем у Гюйгенса).

[20] Это наблюдение описано Гюйгенсом в „Journal des savans“ 26 февраля 1665 г. Там он еще пытается объяснить явление движением воздуха. Здесь дано правильное объяснение. Поэтому Поггендорф не прав, утверждая в своей „Истории физики“ (1879), что Элликот первый в 1739 г. нашел причину явлений. Открытое Гюйгенсом явление получило название „принудительного консонанса“ и нашло большое применение в современных радиосхемах.

[21] Это известный подвес Кардана (Cardano, 1501—1576).

[22] В этом месте переводчик позволил себе несколько отойти от подлинника, введя для ясности обозначение времени τ. Следует читать: „Разделим время на равные промежутки, называя их τ. Пусть...“, и т. д. Гюйгенс пишет: „первое время“, „второе время“. Мы переводим „первый промежуток времени“, „следующий или второй одинаковый промежуток времени“, и т. д.

[23] Мы имеем здесь любопытное высказывание Гюйгенса по энергетическому вопросу. См. статью „Работы Гюйгенса по механике“, в настоящем издании.

[24] Галилей в своем методе геометрического расчета интеграла вполне законно пренебрегает величинами второго порядка малости.

[25] Букв S и T нет в оригинале, и они заменяются словами.

[26] В данном случае Гюйгенс не прав. Доказательство Галилея безупречно.

[27] Нами пропущено приводимое Гюйгенсом определение термина „элевация“ наклонной плоскости.

[28] Джон Уоллис (Валлис, 1616—1703) издал в 1659 г. в Оксфорде труд под названием: „Tractatus duo, Prior de cycloide et corporibus inde genitis. Posterior, Epistolaris, in qua agitur de cycloide et corporibus inde genitis etc.“. К первой части были приложены исследования Христофора Рена (Врена, 1632—1723) „De recta tangente etc...“ (стр. 531—541) Рен дает то же построение касательной, что и Гюйгенс (стр. 533).

[29] Такие кривые называются рулеттами. Гюйгенс рассматривает только рулетты, имеющие основанием прямую линию.

[30] Гюйгенс развивает здесь идею, изложенную Декартом в письме к Мерсенну, и указанную ван Схоутеном в его „Комментариях к геометрии“.

[31] Эти кривые для случая круга, катящегося по прямой, носят название „трохоид“ или также удлиненных, или соответственно, укороченных циклоид.

[32] Гюйгенс пишет: „Три величины, AB, AD, AF, пропорциональны между собой“.

[33] Галилей, „Discorsi etc.“, 3-й день.

[34] Гекшер и Еттинген дают следующее, значительно более простое доказательство предложения XXIV. Делим FG на n равных частей и проводим через каждое деление горизонтальную линию. Таким образом, BI разделится на n равных частей. Для каждой части будет справедливо утверждение предыдущего параграфа.

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{ST}{QR}.$$

Знаменатель левого отношения τ_2 — время пробега одного участка на BI с постоянной скоростью v_2 — есть величина постоянная. Знаменатель правого отношения — один из отрезков FG — также величина постоянная. Делим наше равенство на n. Тогда знаменатель левого отношения $n\tau_2 = t_2$ и правого отношения $nQR = FG$. Мы получаем n равенств, в каждом из которых знаменатель левого отношения t_2 и знаменатель правого отношения FG. Сложим все эти равенства, тогда в числителе левого отношения будет сумма всех времен τ_1, в течение которых пробегаются отдельные касательные к циклоиде, каждая с той скоростью, которую приобретает тело, падая от B по циклоиде до точки касания соответственной касательной. Справа в числителе стоит сумма всех малых касательных к кругу между F и H. Если теперь дать n расти до ∞, то мы можем вместо суммы малых касательных взять длину дуги, а сумма τ составит время падения t_1 вдоль дуги циклоиды BF. Так мы приходим к пропорции

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\smile FH}{FG},$$

что и требовалось доказать.

Гекшер и Еттинген замечают, что Гюйгенсу это доказательство представилось бы недостаточно строгим, так как ему переходы к пределам были не так привычны, как нам. Поэтому он строит свое громоздкое и косвенное, правда, вместе с тем и безупречное доказательство.

[35] Галилей, „Discorsi . . .“, 3-й день.

[36] Под колебанием Гюйгенс понимает переход тела из положения B в соответствующую точку с противоположной стороны. Поэтому период колебания у Гюйгенса соответствует полупериоду, по теперешним опре-

делениям. Его пропорция в современном виде и считая период по его счету выглядит так:

$$7\sqrt{\frac{2a}{g}}=\pi.$$

Здесь a — длина оси циклоиды.

[37] Гюйгенс вместо слова „эвольвента“ вводит термин „описанная при развертке“ — „descripta ex evolutae“.

[38] Из неравенства $\angle NKB < \angle GEF$ следует неравенство $\operatorname{ctg} NKB > \operatorname{ctg} GEF$.

[39] См. примеч. 28.

[40] Предложение задач на премию в июне 1658 г. (Oevres de Pascal. Paris, 1872, III, 322).

[41] Подробнее об этих спорах см. у Кантора.*

[42] Гюйгенс употребляет термин „параболоида“ вместо полукубическая парабола.

[43] Поднормаль параболы равна полупараметру.

[44] Для полукубической параболы $y^3 = qx^2$ уравнение касательной имеет вид

$$y - y_1 = \frac{2qx_1}{3y_1^2}(x - x_1),$$

где x_1y_1 — координаты точки касания. Для точки пересечения касательной с осью ординат $x = 0$, а y определяется из

$$y - y_1 = -\frac{2qx_1^2}{3y_1^2},$$

так как точка B лежит на полукубической параболе, то

$$qx_1^2 = y_1^3.$$

Отсюда $y = y_1 - \frac{2y_1^3}{3y_1^2} = y_1 - \frac{2}{3}y_1 = \frac{1}{3}y_1$. Для фиг. 46 это означает $AG = \frac{1}{3}AD$.

[45] Подкасательная параболы делится пополам в вершине параболы.

[46] Из прямоугольного треугольника GFH имеем $FK^2 = HK \cdot KG$, делим на KG^2; это дает

$$\frac{FK^2}{KG^2} = \frac{HK}{KG}.$$

---

* Cantor. Geschichte der Mathematik. Bd. II, 1900, SS. 907—910,

[47] На фиг. 46 предыдущего предложения:

$$AB + AE = BGF,$$

отсюда

$$\smile AB = BG + GF - AE;$$

треугольник KGF той же фигуры совпадает с AEF (фиг. 47), ибо, как показано в предложении VIII, $KG = AE = \frac{8}{27}q$, а углы имеют параллельные стороны и, следовательно, равны. Отсюда следует, что GF предыдущей фигуры равно EF последней фигуры и, таким образом,

$$AB = BG + EF - AE.$$

[48] Descartes, Geometria, pp. 517—520. Heuraet epistola de transmutatione curvarum in rectas.

[49] Позиция Гюйгенса в этой полемике неоднократно подвергалась критике. Подробнее см. у Кантора.* Есть сведения, что Гюйгенс позднее взял назад свое отрицательное мнение о работах Нейля.**

[50] Fermatius. De linearum curvarum cum curvis rectis comparatione (1660).

[51] Ср. ниже последнюю задачу предложения IX.

[52] Ср. ниже первую задачу. Здесь, как и далее Гюйгенс под параболоидом, эллипсоидом, гиперболоидом понимает только поверхности, полученные вращением параболы, эллипса или гиперболы.

[53] Построение правильно. Пусть p — полупараметр параболы, имеем $b^2 = 2pa$.

Далее

$$DE = 2a,$$

$$AE = \sqrt{b^2 + 4a^2} = \frac{b}{p}\sqrt{p^2 + b^2},$$

из $\frac{AG}{GD} = \frac{AE}{AD}$ следует:

$$\frac{GD}{AG + GD} = \frac{AD}{AE + AD};$$

$$GD = \frac{AD^2}{AE + AD} = \frac{p\,(\sqrt{p^2 + b^2} - p)}{b},$$

$$H = AE + GD = \frac{b^2\sqrt{p^2 + b^2} + p^2\sqrt{p^2 + b^2} - p^3}{bp},$$

* Ук. соч., т. II, 1900, стр. 905 и т. III, 1900, стр. 138 и 141.

** Oevres complètes de Christiaan Huygens, t. XVIII, 1934, pp. 210—211, примеч. 1.

$$L=\frac{1}{3}AC=\frac{2}{3}b,$$

$$X^2=HL=\frac{2}{3}\,\frac{(p^2+b^2)\sqrt{p^2+b^2}-p^3}{p}.$$

С другой стороны, кривая поверхность тела, возникшего путем вращения параболы вокруг оси x, равна

$$S=2\pi\int_0^b y\,ds.$$

В нашем случае

$$S=\frac{2\pi}{p}\int_0^b y\sqrt{p^2+y^2}\,dy=\frac{2\pi}{3}\,\frac{(p^2+b^2)\ \sqrt{p^2+b^2}-p^3}{p}=\pi X^2,$$

т. е. равна площади круга радиуса X.

[54] Пусть $AE=n\cdot AD$, тогда и $AG=nGD$. Если $GD=u$, то $AG=nu$

$$\frac{\pi x^2}{\pi\,AD^2}=\frac{2\,(n^2+n+1)}{3\,(n+1)},$$

т. е. если n — рационально, то и отношение $\dfrac{\pi x^2}{\pi\,AD^2}$ рационально.

[55] И это построение правильно. Пусть

$$AG=a,\quad CD=b,\quad CF=e.$$

Для определения длины дуги BHA определяем радиус $BG=r$ и центральный угол $\varphi=2\angle BGC$

$$\frac{BG}{DF}=\frac{BC}{CF},\qquad r=\frac{a^2}{e};$$

$$\varphi=2\angle BGC=2\angle CDF=2\arcsin\frac{e}{a},$$

$$\smile AHB=2\,\frac{a^2}{e}\arcsin\frac{e}{a},$$

$$k^2=b\left\{2\,\frac{a^2}{e}\arcsin\left(\frac{e}{a}\right)+2b\right\}.$$

Напишем уравнение эллипса в форме

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t,$$

тогда

$$ds=\sqrt{a^2-e^2\cos^2 t}\,dt.$$

Половина поверхности эллипсоида равна

$$\frac{1}{2}S = 2\pi \int y ds = 2\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - e^2 \cos^2 \varphi} \sin \varphi \, d\varphi.$$

Окончательно для всей поверхности эллипсоида получаем

$$2\pi b \left\{ b + \frac{a^2}{e} \arcsin \frac{e}{a} \right\},$$

т. е. площадь круга с радиусом, данным Гюйгенсом.

56 Можно показать, что s — длина дуги AGB равна

$$s = a + \frac{b^2}{e} \ln \frac{a+e}{b}.$$

Отсюда

$$H^2 = 2a \cdot s = 2a \left\{ a + \frac{b^2}{e} \ln \frac{a+e}{b} \right\}.$$

Для эллипса вычисляем (как в предыдущем примечании)

$$S = 2\pi a \left\{ a + \frac{b^2}{e} \ln \frac{a+e}{b} \right\},$$

т. е. круг с построенным Гюйгенсом радиусом H.

57 Под гиперболоидом Гюйгенс понимает одну половину двуполого гиперболоида вращения.

58 Пусть a и b будут главная и побочная оси данной гиперболы, e — ее линейный эксцентриситет, и пусть $FB = X$. Тогда $AG = 2p = 2\frac{b^2}{a}$; $AH = \frac{b^2}{a}$.

Из

$$\frac{HF}{AF} = \frac{AF^2}{KF^2}$$

следует

$$\frac{a + \frac{b^2}{a}}{a} = \frac{a^2}{FK^2}$$

и далее

$$FK = \frac{a^2}{e}.$$

Если a' и b' — главная и побочная оси гиперболы KLM, p' — ее полупараметр, то

$$a' = FK = \frac{a^2}{e},$$

$$a : a' = p' : p,$$

$$p' = \frac{ap}{a'} = \frac{b^2 e}{a^2},$$

$$b'^2 = a' \, p' = \frac{a^2}{e} \cdot \frac{b^2 e}{a^2} = b^2,$$

$$b' = b.$$

Надо измерить площадь $ALMB = \int\limits_a^x y dx$

$$y = \frac{b'}{a'} \sqrt{x^2 - a'^2} = \frac{be}{a^2} \sqrt{x^2 - \frac{a^4}{e^2}},$$

отсюда

$$ALMB = \frac{be}{a^2} \int\limits_a^x \sqrt{x^2 - \frac{a^4}{c^2}} \, dx,$$

по Гюйгенсу,

$$\frac{S}{\pi BC^2} = \frac{ALMB}{\frac{1}{2} BC^2},$$

т. е.

$$S = 2\pi \frac{be}{a^2} \int\limits_a^x \sqrt{x^2 - \frac{a^4}{e^2}} \, dx.$$

В данной гиперболе

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2},$$

$$ds = \frac{\sqrt{e^2 x^2 - a^4}}{a \sqrt{x^2 - a^2}} \, dx.$$

Следовательно,

$$S = 2\pi \int\limits_{x=a}^{x} y ds = 2\pi \frac{be}{a^2} \int\limits_a^x \sqrt{x^2 - \frac{a^4}{e^2}} \, dx$$

в полном согласии с конструкцией Гюйгенса.

[59] Довольно длинный и громоздкий расчет подтверждает утверждение Гюйгенса.

[60] Расчет показывает, что для длины дуги AB и прямой IR получается одно и то же выражение

$$IR = \smile AB = \frac{Y}{2p}\sqrt{Y^2+p^2} + \frac{p}{2}\ln\left(\frac{Y+\sqrt{Y^2+p^2}}{p}\right),$$

где $Y = AK$, p — полупараметр параболы. Итак, длина дуги AB равна длине IR.

[61] Метод Гюйгенса применим и к неравнобоким гиперболам, ассимптоты которых образуют косой угол между собой. Если выбрать ассимптоты за оси координат, то уравнение гиперболы будет

$$xy = \frac{e^2}{4},$$

где e — линейный эксцентриситет.

Если угол между ассимптотами α и x_0, y_0 — координаты точки D, x_1, y_1 — координаты точки B, то площадь $DEVBAD$ равна

$$F = \int\limits_{x=x_0}^{x_1} y \sin\alpha\, dx = \sin\alpha \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{e^2\, dx}{4x} = \frac{e^2}{4}\sin\alpha \ln\frac{x_1}{x_0}.$$

Площадь параллелограма $SCED$ равна:

$$F' = x_0\, y_0 \sin\alpha = \frac{e'^2}{4}\sin\alpha.$$

Отсюда

$$F = F' \ln\frac{x_1}{x_0}.$$

Для получения натурального логарифма Гюйгенс умножает бриггов логарифм на величину, обратную модулю M бригговых логарифмов

$$\ln\frac{x_1}{x_0} = \frac{\lg\frac{x_1}{x_0}}{M},$$

т. е. он прибавляет к $\lg\left[\lg\frac{x_1}{x_0}\right]$ бриггов логарифм $\frac{1}{M} = 0.3622156787$ и получает

$$\lg\left[\ln\left(\frac{x_1}{x_0}\right)\right].$$

62 Как известно, уравнения эволют эллипса или гиперболы имеют вид

$$\left(\frac{a\xi}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}} \pm \left(\frac{b\eta}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Это — уравнение шестой степени относительно ξ и η.

63 У равносторонней гиперболы $b = a$; $e^2 = 2a^2$. Следовательно, уравнение $\left(\frac{a\xi}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{b\eta}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ превращается в

$$\xi^{\frac{2}{3}} - \eta^{\frac{2}{3}} = (2a)^{\frac{2}{3}}.$$

Это выражение легко преобразуется в

$$[\xi^2 - \eta_2 - (2a)^2]^3 = 27\xi^2 \eta^2 (2a)^2.$$

64 Если в уравнение эволюты эллипса

$$\left(\frac{a\xi}{e^2}\right)^{\frac{2}{2}} + \left(\frac{b\eta}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

подставить $\xi = 0$, то получается $DM = \eta = \frac{e^2}{b}$.

Отсюда

$$LM = \frac{e^2}{b} + b = \frac{a^2}{b}.$$

65 По мере приближения точки B к точке L точка F уходит в бесконечность, точки G и K сближаются все более и более, и дробь $\frac{GF}{FK}$ стремится к пределу 1. Ввиду этого из уравнения $\frac{BH}{GH} = \frac{GF}{FK} \cdot \frac{AD}{DE}$, определяющего положение точки H на линии BG, при совпадении B и L получается уравнение

$$\frac{LM}{DM} = \frac{AD}{DE}.$$

Отсюда следует

$$\frac{LM}{LM - DM} = \frac{AD}{AD - DE},.$$

$$\frac{LM}{LD} = \frac{AD}{AE},$$

$$LM = \frac{AD \cdot LD}{AE} = \frac{a \cdot b \cdot a}{b^2} = \frac{a^2}{b},$$

т. е. из построения кривой получается для LM то же значение, что и из уравнения эволюты (см. примеч. 64).

[66] Гюйгенс исходит из того, что эволюта кривой есть геометрическое место пересечений соседних нормалей. Безупречным, основанным на понятии предела, образом, он выводит соотношение $BG : GM = BO : MN$, которое определяет положение точки G на нормали BM.

В современной форме пропорция выглядела бы так:

$$BO = BP + PO = BP + \frac{PF^2}{BP} = BP\left[1 + \left(\frac{PF}{BP}\right)^2\right] = \Delta x\left[1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right],$$

$$BO = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] dx,$$

$$MN = KL + LN - KM = \Delta x + \Delta\,\mathrm{Sn},$$

где Sn — поднормаль;

$$\mathrm{Sn} = y\,\frac{dy}{dx};$$

$$\Delta\,\mathrm{Sn} = \Delta y\,\frac{dy}{dx} + y\Delta\,\frac{dy}{dx},$$

$$\text{пред. } MN = dx + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx + y\,\frac{d^2 y}{dx^2}\,dx.$$

Поэтому наша пропорция принимает вид

$$\frac{BG}{MG} = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\,\frac{d^2 y}{dx^2}},$$

$$\frac{BG}{BG - MG} = \frac{BG}{BM} = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{y\,\frac{d^2 y}{dx^2}}.$$

Длина нормали равна

$$BM = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Следовательно,

$$BG = \pm\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}}.$$

Здесь знак надо выбирать так, чтобы $BG > 0$. Это есть выражение для радиуса круга кривизны, центр которого ведь и находится в G.

[67] Уравнения циклоиды суть

$$x = a(t - \sin t);$$
$$y = a(1 - \cos t).$$

Отсюда легко выводится

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2},$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \frac{t}{2}},$$

$$y \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{2\sin^2 \frac{t}{2}}.$$

Следовательно,

$$\frac{BG}{MG} = \text{пред.}\, \frac{BO}{MN} = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{d^2 y}{dx}} = \frac{\dfrac{1}{\sin^2 \frac{t}{2}}}{\dfrac{1}{\sin^2 \frac{t}{2}} - \dfrac{1}{2\sin^2 \frac{t}{2}}} = 2.$$

[68] Пусть Sn — поднормаль, St — подкасательная, тогда

$$NH = \mathrm{Sn} + \mathrm{St}; \quad LH = \mathrm{St}\; KL = \Delta x; \quad MX = \Delta x + \Delta\,\mathrm{Sn}.$$

Итак, имеем

$$\frac{BO}{MN} = \frac{\mathrm{Sn} + \mathrm{St}}{\mathrm{St}} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta x + \Delta\,\mathrm{Sn}}.$$

[69] Точка D или G находится из пропорции

$$BM : MG = p : 2KA.$$

[70] См. предложение VIII.

[71] Здесь берутся абсолютные значения разностей, не обращая внимания на знак.

[72] Как показано в примеч. 68, Гюйгенс приводит отношение $\frac{BO}{MN}$ к виду $\frac{\mathrm{Sn} + \mathrm{St}}{\mathrm{St}} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta x + \Delta\,\mathrm{Sn}}$; теперь Гюйгенс делит отрезок $\Delta x + \Delta\,\mathrm{Sn}$ на две части $XV = \Delta x$ и $XT = \Delta\mathrm{Sn}$.

[73] Если ξ и η — бегущие координаты этой кривой, а x и y — координаты данной кривой, то мы имеем

$$\xi = x,$$

$$\eta = \mathrm{Sn} = y\frac{dy}{dx}.$$

[74] Для эллипса и гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

$$\frac{x\,dx}{a^2} \pm \frac{y\,dy}{b^2} = 0;$$

$$\frac{y\,dy}{dx} = \pm \frac{b^2}{a^2}\,x;$$

$$\eta = \mp \frac{b^2}{a^2}\,x.$$

Это уравнение прямой, проходящей через начало координат. Для параболы

$$y^2 = 2px,$$

$$y\,\frac{dy}{dx} = p.$$

Это уравнение представляет прямую, параллельную оси x.

[75] Descartes, Geometria, I, pp. 40. Oevres de Descartes, t. VI, pp. 413—424 (Geometria, II).

[76] Примем ось SKL за ось X, касательную при вершине SZ за ось Y; тогда уравнение полукубической параболы будет:

$$y^3 = qx^2.$$

Отсюда

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3y^2}{2qx} = \frac{3y^3}{2qxy} = \frac{3qx^2}{2qxy} = \frac{3x}{2y}.$$

Следовательно, подкасательная HK равна

$$HK = y\,\frac{dx}{dy} = \frac{3x}{2}$$

и так как x есть SK,

то

$$HS = HK - SK = \frac{x}{2} = \frac{SK}{2}.$$

[77] Автор в своем экземпляре написал на полях „При этом делается предположение $LN > KM$. Лучше было бы доказать его предварительно, несмотря на то, что оно верно“. Доказательство не трудно. Пусть абсцисса $SK = x$, ордината $KB = y$, параметр параболы $= q$. Из $SH = \frac{1}{2}SK$ следует:

$$HK = \frac{3}{2}SK = \frac{3}{2}x.$$

В прямоугольном треугольнике HBM имеем

$$HK : KB = KB : KM,$$

$$\frac{3}{2}x : y = y : KM,$$

$$KM = \frac{2y^2}{3x},$$

$$KM^2 = \frac{4y^4}{9x^2} = \frac{4qy^4}{9qx^2} = \frac{4}{9}qy.$$

Поэтому KM растет, когда растет $y = BK$. Мы имеем

$$LF > BK,$$

следовательно, и

$$LN > KM,$$

что и требовалось доказать.

78 Напишем уравнение кубической параболы VTS:

$$y = \frac{2}{3}\sqrt[3]{q^2 x},$$

$$27y^3 = 8q^2 x,$$

$$81y^2 dy = 8q^2 dx,$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{81y^2}{8q^2} = \frac{3x}{y}.$$

Следовательно, подкасательная $YK = y\frac{dx}{dy} = 3x$. Так как $SK = x$, то

$$YS = 2x = 2SK.$$

79 Это будет уравнение четвертой степени.

80 Кубическая парабола вообще не имеет настоящей оси симметрии. Прямая SZ так же мало имеет право на название оси, как и прямая SM.

81 Если x и y — бегущие координаты кубической параболы $SABF$, ξ и η — бегущие координаты эволюты IRD, то имеют место равенства

$$\xi = \frac{15y^4 + q^4}{bq^2 y}, \quad \eta = \frac{(q^4 - 9y^4)\,y}{2q^4},$$

которые выражают ξ и η как функции y. С помощью этих уравнений находим

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{3y^2}{q^2}; \qquad \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = -\frac{36y^3}{45y^4 - q^4}.$$

$$\text{Для } SP = x = \frac{q}{\sqrt[4]{45^3}} \text{ имеем } y = \frac{q}{\sqrt[4]{45}}; \ \xi = \frac{2\sqrt[4]{45}}{9} q; \ \eta = \frac{2}{5\sqrt[4]{45}} q;$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \infty.$$

В точке R кривая имеет особую точку — „точку поворота". По определению эволюты у Гюйгенса все равно, будем ли мы рассматривать касательную AR как часть эволюты или нет. Так как мы в настоящее время рассматриваем эволюту как геометрическое место центров кривизны, то мы не можем присоединять AR к кривой.

82 Гюйгенс в предложении XI вывел пропорцию для определения точки P

$$\frac{BD}{DM} = \frac{BO}{MN}.$$

В современном виде пропорция имеет вид (см. примеч. 66):

$$\frac{BD}{DM} = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Отсюда легко выводится

$$\frac{BD}{DM} = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{-y\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Пусть уравнение параболы имеет вид

$$y^n = q^{n-m} x^m,$$

тогда

$$ny^{n-1}\,dy = mq^{n-m} x^{m-1}\,dx,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{n}\frac{y}{x},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{m}{n}\frac{x\frac{dy}{dx} - y}{x^2} = \frac{m(m-n)\,y}{n^2x^2} = -\frac{m(n-m)}{n^2x^2}y.$$

Следовательно,

$$\frac{BD}{BM} = \frac{(n^2x^2 + m^2y^2)\,n^2x^2}{n^2x^2y \cdot m(n-m)\,y} = \frac{m}{n-m} + \frac{n^2}{m(n-m)}\cdot\frac{x^2}{y^2},$$

$$BD = \frac{m}{n-m}BM + \frac{n^2}{m(n-m)}\frac{x^2}{y^2}BM.$$

Мы имеем также соотношение

$$\frac{ZB}{BM}=\frac{SK}{KM}=\frac{x}{\mathrm{Sn}},$$

$$ZB=\frac{x}{\mathrm{Sn}}BM=\frac{x}{y}\cdot\frac{dx}{dy}BM=\frac{nx^2}{my^2}BM.$$

Вставляем это в выражение для BD

$$BD=\frac{m}{n-m}BM+\frac{n}{n-m}BZ,$$

что и требовалось доказать.

[83] В предложении X

$$[\xi^2-\eta^2-(2a^2)]^3=27\xi^2\eta^2(2a)^2.$$

[84] Вывод протекает так же, как для парабол (см. примеч. 82). Опять

$$\frac{BD}{BM}=\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{-y\,\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Если уравнение гиперболы имеет вид

$$x^m y^n=a^{m+n},$$

то

$$mx^{m-1}y^n\,dx+nx^n y^{n-1}\,dy=0,$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{my}{nx},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{m}{n}\,\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{x^2}=\frac{m(m+n)y}{n^2x^2},$$

$$\frac{BD}{BM}=-\frac{n^2x_2+m^2y^2}{m(m+n)y^2}=-\frac{m}{m+n}-\frac{n^2}{m(m+n)}\cdot\frac{x^2}{y^2},$$

$$BD=-\frac{m}{m+n}BM-\frac{n^2}{m(m+n)}\frac{x^2}{y^2}BM;$$

и для гиперболы также

$$\frac{ZB}{MB}=\frac{SK}{KM}=\frac{x}{\mathrm{Sn}}=\frac{x}{y}\cdot\frac{dx}{dy},$$

следовательно,

$$ZB = -\frac{x \cdot nx}{y \cdot my} BM = -\frac{nx^2}{my^2} BM.$$

Вставляем в выражение для BM

$$BD = -\frac{m}{m+n} BM + \frac{n}{m+n} ZB.$$

Отрицательный знак у BM показывает, что BM имеет на этот раз обратное направление, как ZB и BD. Если мы напишем $MB = -BM$, то мы получим

$$BD = \frac{m}{m+n} MB + \frac{n}{m+n} ZB.$$

85 Подкасательная $HK = y\frac{dx}{dy}$.

Для парабол $\frac{dy}{dx} = \frac{my}{nx}$ (примеч. 82).

Для гипербол $\frac{dy}{dx} = -\frac{my}{nx}$ (примеч. 84).

Отсюда

$$HK = \pm y \frac{nx}{my} = \pm \frac{n}{m} x,$$

$$\frac{SK}{HK} = \frac{x}{\pm \frac{n}{m} x} = \pm \frac{m}{n}.$$

Знак определяет направление отрезка HK.

86 Критико-историческое исследование учения о центре качания написал Цвергер.*

87 Это произошло в 1646 г., когда Гюйгенсу не было еще 17 лет.

88 „Через подобные дуги", т. е. при равных амплитудах, тогда центральные углы равны, а следовательно, дуги подобны, независимо от радиуса, т. е. длины маятника.

89 По современной терминологии, это ось фигуры.

90 По современной терминологии, колебания в этом случае совершаются перпендикулярно плоскости фигуры или линии.

91 По современной терминологии, в этом случае фигура или линия колеблется в своей плоскости.

* W. Zwerger. Der Schwingungmittelpunkt zusammengesetzter Pendel. München, 1889.

92 Эта гипотеза составляет основу всего учения Гюйгенса о центре качания. В свое время она вызвала резкие возражения, в особенности со стороны Кателана. Теперь мы в ней видим особый случай закона сохранения энергии. Подробное изложение полемики см. стр. 311 и след. настоящего издания.

93 В этом случае

$$X_0 = \frac{\Sigma\, mx}{\Sigma\, m} = \frac{m\, \Sigma\, x}{m \cdot n} = \frac{\Sigma\, x}{n}$$

или

$$\sum x = n\, X_0\,,$$

где n — число тел, x — длина одного из перпендикуляров, X_0 — соответствует GH.

94 Это предложение содержит общее решение задачи нахождения центра качаний сложного физического маятника.

Пусть m — масса каждой части, r — расстояние ее от оси колебаний, r_0 — расстояние центра тяжести маятника от той же точки, тогда, согласно этому предложению,

$$l = \frac{\Sigma\, mr^2}{r_0\, \Sigma\, m}.$$

Так как

$$r_0 \sum m = \sum mr,$$

то

$$l = \frac{\Sigma\, mr^2}{\Sigma\, mr}.$$

95 Здесь, по правильному замечанию Гекшера, совсем не применяется предложение I. По поставленному условию получается $(a+b+c)\,d$, а это произведение, конечно, равно $ad+bd+cd$. Применение предложения I дало бы для $(a+b+c)\,d$ сумму $ac+bf+cg$.

96 Если имеется n равных частей, то из формулы

$$l = \frac{\Sigma\, mr^2}{r_0\, \Sigma\, m}$$

получается

$$l = \frac{m\, \Sigma\, r^2}{r_0 nm} = \frac{\Sigma\, r^2}{nr_0}.$$

97 В этом случае

$$r_0 = \frac{\Sigma\, mr}{\Sigma\, m} = \frac{m\, \Sigma\, r}{n \cdot m} = \frac{\Sigma\, r}{n}\,,$$

$$nr_0 = \Sigma r,$$

$$l = \frac{\Sigma r^2}{nr_0} = \frac{\Sigma r^2}{\Sigma r}.$$

[98] Как уже указано, предложение V представляет общее решение задачи определения центра качания маятника. Применение этого решения к частным случаям было, правда, в то время еще трудным, так как для сложных тел нахождение центра качаний требует интегрирования. А интегральное исчисление в то время еще только развивалось. Гюйгенс вводит указанный в определении клин, чтобы производить своеобразное интегрирование. Он всегда предполагает, что угол между двумя, составляющими клин, плоскостями равен 45°, хотя явно говорит об этом только в предложеии VII.

Если мы плоскость фигуры примем за плоскость XY, а касательную за ось x, то для каждой точки другой плоскости

$$z = y.$$

Следовательно, объем клина

$$V = \int dF \cdot z = \int y dF.$$

[99] Если сохранить обозначения предыдущего замечания, то субцентрика клина есть „координата“ y его центра тяжести; назовем ее y_1, имеем

$$y_1 = \frac{\int y dV}{V} = \frac{\int y^2\, dF}{\int y\, dF}.$$

Субцентрика сохраняет свое значение, если обе плоскости, образующие клин, составляют между собой не угол 45°, а какой-либо другой угол α, тогда только в числителе и знаменателе прибавляется множитель $\operatorname{tg}\alpha$, так как

$$z = y \operatorname{tg} \alpha; \quad dV = ydF \operatorname{tg} \alpha.$$

Легко заметить сходство этого выражения с тем, которое мы имели для l, длины простого маятника, изохронного со сложным.

Там мы имели

$$l = \frac{\Sigma mr^2}{\Sigma mr}.$$

Для сложного однородного тела надо вместо m писать dV. Суммы преобразуются в интегралы, и мы имеем

$$l = \frac{\int r^2 dV}{\int r dV}.$$

[100] Пусть ордината центра тяжести фигуры будет y_0:

$$y_0 = \frac{\int ydF}{\int dF} = \frac{\int ydF}{F}$$

Объем клина V

$$V = \int ydF,$$

следовательно,

$$V = Fy_0.$$

Доказательство Гюйгенса в современном изложении выглядело бы так.

Если dF — часть фигуры, y — ее расстояние от прямой CB, то

$$\int ydF = y_0 \int dF = Fy_0,$$

где $y_0 = FA$ — расстояние центра тяжести фигуры от прямой CE. Имеем

$$ydF = zdF,$$

так как $z = y$.

Очевидно,

$$\int zdF = V;$$

следовательно,

$$V = Fy_0.$$

[101] Эта теорема гласит: сумма указанных квадратов, разделенная на число частей, равна произведению из расстояния центра тяжести фигуры от прямой на субцентрику клина. Число частей изображается дробью $\frac{F}{dF}$.

Левая часть равенства есть

$$\text{Пред.} \sum y^2 \frac{\Delta F}{F} = \frac{\int y^2 dF}{F}.$$

Правая часть в наших старых обозначениях равна $y_0 y_1$. Итак, теорема гласит:

$$\int \frac{y^2 dF}{F} = y_0 y_1.$$

Подставляя значения y_0 и y_1, выше данные, получаем тождество

$$\frac{\int y^2\, dF}{F} = \frac{\int ydF}{F} \cdot \frac{\int y^2\, dF}{\int ydF}.$$

Доказательство Гюйгенса проводится следующим образом:

$$dV = zdF = ydF;$$

$$ydV = y^2 dF;$$

$$\int ydV = y^2 dF.$$

По предложению I

$$\int ydV = y_1 V,$$

следовательно,

$$\int y^2\, dF = \int y_1 V$$

Так как по предыдущему предложению $V = Fy_0$, то

$$\int y^2\, dF = Fy_0 y_1.$$

[102] Пусть y' расстояние части ΔF от данной прямой. Надо определить фигуру по равенству

$$I\frac{F}{\Delta F} = \sum y'^2,$$

где I — площадь определяемой фигуры. В пределе

$$I = \frac{\int y'^2\, dF}{F}.$$

Пусть y — расстояние от частицы до касательной к данной фигуре, параллельной данной прямой, и a — расстояние от прямой до касательной, то

$$y' = y \mp a,$$

$$I = \frac{\int y^2\, dF}{F} \pm \frac{2a\int ydF}{F} + a^2\frac{\int dF}{F}.$$

Но по предложению VIII

$$\frac{\int y^2\, dF}{F} = y_0 y_1$$

и

$$y_0 = \frac{\int ydF}{F}.$$

Следовательно,

$$I = y_0 y_1 \pm 2ay_0 + a^2 = y_0 y_1 - y_0^2 + y_0^2 \pm 2ay_0 + a^2 =$$
$$= y_0(y_1 - y_0) + (y_0 \pm a)^2 = y_0(y_1 - y_0) + y_0'^2$$

или

$$I = AG \cdot GH + EG^2.$$

103 Нам известны AG и GH для одной касательной и AG для второй касательной, следовательно, легко определить GH для второго случая.

104 Для половины фигуры имеем по предложению VIII

$$\int \frac{y^2\,dF}{F} = y_0 y_1 = VG \cdot XG.$$

Для всей фигуры по предложению X

$$\int \frac{y^2\,dF}{F} = I = AG \cdot HG.$$

Но величина $\frac{\int y^2\,dF}{F}$ имеет в обоих случаях то же значение, так как во втором случае как числитель, так и знаменатель в два раза больше, чем в первом. Следовательно,

$$VG \cdot XG = AG \cdot HG.$$

105 Пусть x_1, y_1; x_2, y_2; ...; x_n, y_n — координаты n данных точек; x_0, y_0 — координаты их центра тяжести; ξ, η — координаты точки F, r — радиус круга. Тогда

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}; \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n};$$

$$(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2 = r^2;$$

требуется показать, что сумма

$$(\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2 + (\xi - x_2)^2 + (\eta - y_2)^2 + \ldots + (\xi - x_n)^2 + (\eta - y_n)^2$$

не зависит от выбора точки F.

Имеем

$$(\xi - x_1)^2 + (\xi - x_2)^2 + \ldots + (\xi - x_n)^2 =$$
$$= n\xi^2 - 2\xi(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2 =$$
$$= n\xi^2 - 2\xi n x_0 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 =$$
$$= n(\xi - x_0)^2 - n x_0^2 + (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2).$$

Точно так же

$$(\eta - y_1)^2 + (\eta - y_2)^2 + \ldots + (\eta - y_n)^2 =$$
$$= n(\eta - y_0)^2 - n y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2.$$

Следовательно, сумма

$$(\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2 + (\xi - x_2)^2 + (\eta - y_2)^2 + \ldots =$$
$$= nr^2 - n(x_0^2 + y_0^2) + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2).$$

Как видно, сумма не зависит от ξ и η.

[106] Гюйгенс стремится определить для телесного маятника $\sum r^2$, где r — расстояние малой части тела от оси качаний, или же он ищет фигуру, площадь которой I удовлетворяет равенству

$$I = \frac{V}{\Delta V} = \sum r^2,$$

где $\frac{V}{\Delta V}$ — число частиц.

В пределе

$$I = \frac{\int r^2\, dV}{V}.$$

Интеграл $\int r^2 dV$ образует числитель в выражении для длины изохронного простого маятника.

Доказательство Гюйгенса, в современной форме, следующее.

Пусть ось колебаний есть ось z. Отвесная линия EC есть ось y. Горизонтальная линия EG ось x. Тогда для каждой малой части $r^2 = x^2 + y^2$. Таким образом,

$$\int r^2\, dV = \int x^2\, dV + \int y^2\, dV;$$

чтобы вычислить $\int y^2\, dV$, представим себе построенной плоскую фигуру такую, чтобы для каждой части площадь фигуры

$$dV = a dF,$$

где a — постоянная, и притом так, чтобы $y = y'$ для каждой малой части площади, т. е. чтобы расстояние элемента площади от прямой EG было бы то же, что для соответственного элемента объема. Тогда

$$\int y^2\, dV = a \int y^2\, dF,$$

а следовательно, по предложению IX,

$$\int y^2\, dF = aF\left\{y_0(y_1 - y_0) + y_0'^2\right\} = V\left\{y_0(y_1 - y_0) + y_0'^2\right\}.$$

Аналогично можно вычислить

$$\int x^2\, dV = V\left\{x_0(x_1 - x_0) + x_0'^2\right\}$$

и получить

$$I=\frac{\int r^2\,dV}{V}=y_0\,(y_1-y_0)+y_0'^2+x_0\,(x_1-x_0)+x_0'^2.$$

Построение Гюйгенса сводится к тому, что он строит фигуры, площадь которых пропорциональна объему и, таким образом, сводит интегрирование по объему к уже известному интегрированию плоской фигуры.

107 Утверждается, что

$$\frac{BC\cdot CK\cdot P\Phi}{\Delta P}=\frac{\int x^2\,dV}{V}.$$

108 По правилу Гюльдена или Гульдина (1577—1643). У Гюйгенса в правой части равенства берется не отношение произведений, а произведение отношений, что, конечно, не меняет дела.

109 По предложению XI имеем для круга

$$AG\cdot GH=XG\cdot GV.$$

Здесь $AG=r$; $GH=s-r$, где s — субцентрика круга; XG — субцентрика клина, построенного на полукруге с использованием диаметра круга; GV — расстояние центра тяжести полукруга от центра круга. Таким образом,

$$XG=\frac{\int y^2\,dF}{\int y\,dF};\ GV=\frac{\int y\,dF}{F},$$

где оба интеграла простираются на полуокружность.
Таким образом,

$$XG\cdot GV=\frac{\int y^2\,dF}{F},$$

но

$$\int y^2\,dF=\int y^2\,x\,dy=r^4\int\limits_0^{\pi}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=\frac{\pi}{8}\,r^4.$$

Следовательно,

$$XG\cdot GV=\frac{\int y^2\,dF}{F}=\frac{\frac{\pi}{8}\,r^4}{\frac{\pi}{2}\,r^2}=\frac{r^2}{4}.$$

Поэтому и

$$AG\cdot GH=r\,(s-r)=\frac{r^2}{4};$$

$$s=\frac{5}{4}\,r.$$

110 У Гюйгенса „любая величина" (magnitudo quaevis).

111 Таким образом, объемная задача сводится к плоской. См. дальнейший вывод.

112 Пусть объем маятника V, объем частицы ΔV, число частиц $\frac{V}{\Delta V}$, r — расстояние от частицы до оси вращения, I — площадь фигуры. Имеем

$$I \frac{V}{\Delta V} = \sum r^2.$$

Пусть r_0 — расстояние от центра тяжести до оси колебаний. Тогда, по нашей теореме, длина изохронного простого маятника равна

$$l = \frac{I}{r_0} = \frac{\int r^2\, dV}{r_0 V}.$$

Это соответствует основной формуле

$$l = \frac{\Sigma\, mr^2}{r_0 \Sigma\, m}.$$

113 Гюйгенс вместо слова „маятник" употребляет слово „величина" (magnitudo) или „подвешенная величина" (suspensa magnitudo).

114 Сохраним прежние обозначения. Пусть r' — расстояние частицы от проложенной через центр тяжести параллели к оси колебаний. Тогда, согласно теореме,

$$I' = \frac{\int r'^2\, dV}{V}; \quad l - r_0 = \frac{I'}{r_0},$$

т. е.

$$l - r_0 = \frac{\int r'^2\, dV}{r_0 V}.$$

Примем, как в предложении XIV, ось колебаний за ось z. Отвесная линия EG — ось y, прямая SF — ось x. Тогда

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Так же как в предложении XIV, Гюйгенс конструирует плоскую фигуру, так что $dV = a\, dF$, где a — константы. При этом построение делается так, чтобы каждая часть поверхности имела бы то же y, что и частица маятника. Тогда по предложению IX

$$\frac{\int y^2\, dF}{F} = OT \cdot TH + ST^2.$$

Левая сторона равенства, помноженная на a, в числителе и знаменателе дает

$$\frac{\int y^2\,dV}{V}$$

Для длины маятника l имеем

$$l=\frac{\int r^2\,dV}{r_0V}=\frac{\int x^2\,dV}{r_0V}+\frac{\int y^2dV}{r_0V}=\frac{\int x^2\,dV}{r_0V}+\frac{OT\cdot TH+ST^2}{r_0}.$$

Но $ST=r_0$, отсюда

$$l-r_0=\frac{\int x^2\,dV}{r_0V}+\frac{OT\cdot TH}{r_0}$$

и по предложению X

$$OT\cdot TH=\frac{\int y'^2\,dF}{F}, \tag{*}$$

где y' — расстояние от частицы до параллели к прямой SF, проведенной через центр тяжести,

$$y'=y-r_0. \tag{*}$$

Но, помножив числитель и знаменатель на a, имеем

$$\frac{\int y'\,dF}{F}=\frac{\int y'\,dV}{V}.$$

Вставив все это, имеем

$$l-r_0=\frac{\int x^2\,dV}{r_0V}+\frac{\int (y-r_0)^2\,dV}{r_0V}=\frac{\int r'^2\,dV}{r_0V}.$$

[115] Определение оси фигуры (linea centri) дано в начале четвертой части „Маятниковых часов“ (см. определение VII). Существование оси вовсе не предполагает существования симметрии фигуры, как ошибочно решили комментаторы немецкого перевода „Маятниковых часов“.

[116] Оси колебаний предполагаются параллельными.

По предыдущей теореме имеем

$$l-r_0=\frac{\int r'^2\,dV}{r_0V},$$

следовательно,

$$(l-r_0)\,r_0=\frac{\int r'^2\,dV}{V}.$$

Правая сторона равенства независима от положения оси вращения, она зависит только от направления оси. Пусть для другой оси, параллельной первой, длина изохронного простого маятника λ и расстояние от центра тяжести до оси колебаний равно ρ, тогда

$$(\lambda-\rho_0)\rho_0=(l-r_0)r_0$$

и

$$\frac{l-r_0}{\lambda-\rho_0}=\frac{\rho_0}{r_0}.$$

117 И здесь надо предположить, что сохраняется плоскость колебаний. На этой теореме основан оборотный маятник, употребляемый и в настоящее время для точных измерений.

118 По предложению XVIII имеем

$$l-r_0=\frac{\int r'^2\,dV}{r_0V}.$$

Здесь это принимает вид

$$l-r_0=\frac{\int r'^2\,dF}{r_0F},$$

где r' — расстояние чаетицы от параллели к оси качаний, проведенной через центр тяжести. Для этого случая по теореме X

$$\frac{\int y'^2\,dF}{F}=AD\cdot AH=y_0(y_1-y_0).$$

Таким образом,

$$l-r_0=\frac{AD\cdot AH}{FA}=\frac{y_0(y_1-y_0)}{r_0}.$$

119 Если DD есть ось колебаний, то $r_0=y_0$, следовательно,

$$l-r_0=y_1-r_0,$$
$$l=y_1,$$

что и требовалось доказать.

120 Предшественниками Гюйгенса в этом отношении были Мунье и в некоторой степени Фабри.*

121 См. примеч. 109.

---

* Tractatus physicus de motu locali etc. Auctore Petro Mousnerio, cuncta excerpta ex praelectionibus R. P. Honorati Fabry, Societatis Iesu (1646).

[122] Если у прямоугольника стороны a и b и если одна сторона b есть ось колебаний, то длина изохронного простого маятника или длина субцентрики соответствующего клина равна

$$l = \frac{\int y^2\,dF}{y_0 F} = \frac{\int\limits_0^a y^2 b\,dy}{\frac{a}{2}\,ab} = \frac{2}{3}\,a.$$

[123] Если вершина обращена вверх, то в формуле

$$l = \frac{\int y^2\,dF}{y_0 F}$$

значения букв следующие:

$$y_0 = \frac{2}{3}\,h;\quad F = \frac{1}{2}\,gh,$$

где h — высота, g — основание треугольника;

$$dF = \frac{g}{h}\,y\,dy,$$

отсюда

$$l = \frac{g\cdot 3\cdot 2}{h\cdot 2hgh}\int\limits_0^h y^3\,dy = \frac{3}{4}\,h.$$

Если вершина обращена вниз,

$$dF = g\,(h-y)\,dy;\quad y_0 = \frac{1}{3}\,h.$$

Следовательно,

$$l = \frac{g}{h}\cdot\frac{3\cdot 2}{h\cdot gh}\int\limits_0^h (h-y)\,y^2\,dy = \frac{h}{2}.$$

[124] По предложению XVIII имеем для случая плоской фигуры

$$l - r_0 = \frac{\int r'^2\,dF}{r_0 F}.$$

Здесь $r'^2 = x^2 + y^2$, где r' — расстояние частицы от центра тяжести; x' — расстояние той же частицы от вертикали, проложенной через центр тяжести; y' — расстояние той же частицы от горизонтали, проложенной через центр тяжести.

Имеем по предложению X:

$$\int \frac{y'^2\, dF}{F} = y_0 (y_1 - y_0) = AD \cdot AH;$$

$$\int \frac{x'^2\, dF}{F} = x_0 (x_1 - x_0) = AB \cdot AL.$$

Таким образом,

$$l - r_0 = \frac{\int y'^2\, dF + \int x'^2\, dF}{r_0 F} = \frac{AD \cdot AH + AB \cdot AL}{r_0}.$$

125 В „Opera varia“ вместо этого предложения приведено следующее рассуждение, включенное Гравезандом на основании исправления, сделанного Гюйгенсом на полях первого издания.

Тогда нужно по предложению XVIII вычислить сумму квадратов перпендикуляров, которые можно опустить от частиц на проведенную через центр тяжести параллель к оси колебаний, т. е. сумму квадратов расстояний частиц от центра тяжести, так как мы имеем дело с плоской фигурой, или же сумму квадратов расстояний от прямой BAC и от прямой DA.

Именно, если OA — расстояние некоторой частицы от центра тяжести A, ON и OV — расстояния той же частицы от BAC и от DA, то по 47 теореме Эвклида (т. I)

$$OA^2 = ON^2 + OV^2.$$

Но сумма квадратов расстояний от прямой BAC равна произведению прямоугольника $DA \cdot AH$ на число частей маятника; при этом DD — касательная, параллельная BAC, DH — субцентрика клина, построенного на фигуре с использованием касательной DD (по предложению X этой части). Так же точно сумма квадратов расстояний от прямой DA равна произведению прямоугольника $BA \cdot AL$ на число частей маятника, где BD — касательная, параллельная AD, и BL — субцентрика клина, построенного с использованием касательной BD.

126 У круга

$$DH = \frac{5}{4} r$$

(сравни примеч. 109), отсюда

$$AH = \frac{1}{4} r,$$

$$DA \cdot AH + BA \cdot AL = \frac{1}{2} r^2.$$

Поэтому (см. примеч. 124)

$$AK = l - r_0 = \frac{r^2}{2r_0}.$$

Если круг колеблется вокруг какой-либо точки на окружности, то

$$r_0 = r; \quad l - r = \frac{r}{2};$$

$$l = \frac{3}{2} r = \frac{3}{4} d,$$

где d — диаметр круга.

[127] Для прямоугольника

$$AD = \frac{a}{2}; \quad DH = \frac{2}{3} a$$

(см. примеч. 122), отсюда

$$AH = \frac{2}{3} a - \frac{a}{2} = \frac{1}{6} a;$$

так же точно

$$BA = \frac{b}{2}; \ AL = \frac{b}{6};$$

$$AD \cdot AH + BA \cdot AL = \frac{a^2}{12} + \frac{b^2}{12} = \frac{d^2}{12} = \frac{e^2}{3},$$

где d — диагональ, e — половина диагонали.
Если прямоугольник подвешивают за углы, то

$$r_0 = e; \quad l - r_0 = \frac{e^2}{3r_0} = \frac{e}{3};$$

$$l = e + \frac{e}{3} = \frac{4}{3} e = \frac{2}{3} d.$$

[128] В равнобедренном треугольнике (см. стр. 165 и примеч. 123).

$$DH = \frac{3}{4} h.$$

Таким образом,

$$DA = \frac{2}{3} h; \quad AH = \frac{3}{4} h - \frac{2}{3} h = \frac{1}{12} h,$$

$$AD \cdot AH = \frac{1}{18} h^2.$$

Далее, здесь $BA \cdot AL = OA \cdot NA$ (ср. предложение XI). При этом

$$OA = \frac{\int x^2\, dF}{x_0 F}\ ; \quad NA = x_0,$$

причем интеграл распространяется на половину равнобедренного треугольника

$$BA \cdot AL = OA \cdot NA = \frac{\int x^2\, dF}{F}\ ,$$

$$dF = \frac{2h}{g}\left(\frac{g}{r} - x\right) dx.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^{\frac{g}{2}} x^2\, dF = \frac{g^3 h}{96}\ ; \quad F = \frac{1}{4}\, gh; \quad BA \cdot AL = \frac{1}{24}\, g^2.$$

129 Если треугольник подвешен в вершине B, то

$$r_0 = \frac{2}{3}\, h;$$

$$l - r_0 = \frac{\frac{1}{18}\, h^2 + \frac{1}{24}\, g^2}{\frac{2}{3}\, h} = \frac{\frac{1}{12}\, h^2 + \frac{1}{16}\, g^2}{h} = \frac{4h^2 + 3g^2}{48h}\ .$$

По конструкции Гюйгенса,

$$DE^2 = BE \cdot EG; \quad \frac{g^2}{4} = h \cdot EG; \quad EG = \frac{g^2}{4h}\ ;$$

$$AG = \frac{h}{3} + \frac{g^2}{4h} = \frac{4h^2 + 3g^2}{12h}\ ,$$

$$AK = \frac{AG}{4} = \frac{4h^2 + 3g^2}{43h}\ .$$

180 Если треугольник подвешен в середине основания, то

$$r_0 = \frac{h}{3}\ ,$$

тогда

$$l - r_0 = \frac{\frac{1}{18} h^2 + \frac{1}{24} g^2}{\frac{1}{3} h} = \frac{\frac{1}{6} h^2 + \frac{1}{8} g^2}{h} = \frac{1}{6} h + \frac{g^2}{8h};$$

$$l = \frac{h}{2} + \frac{g^2}{8h}.$$

По построению

$$BG = BE + EG = h + \frac{g^2}{4h},$$

$$\frac{1}{2} BG = \frac{h}{2} + \frac{g^2}{8h}.$$

131 В равнобедренном прямоугольном треугольнике $g = 2h$, поэтому, когда треугольник подвешен в середине основания,

$$l = \frac{1}{2} h + \frac{g^2}{8h} = h.$$

Если треугольник подвешен за вершину, то

$$l - \frac{2}{3} h = \frac{4h^2 + 3g^2}{48h} = \frac{1}{3} h;$$

$$l = h.$$

132 „Прямой“ у Гюйгенса означает „симметричный относительно оси“.

133 Пусть уравнение параболы будет

$$x^2 = 2py;$$

тогда

$$y_0 = AD = \frac{\int y\, dF}{F};$$

$$x\, dx = p\, dy;$$

$$dF = 2x\, dy = \frac{2x^2}{p} dx.$$

Имеем

$$b^2 = 2pa,$$

$$\int y\, dF = \int_0^b \frac{x^2}{2p} \cdot \frac{2x^2}{p}\, dx = \frac{b^5}{5p^2}$$

или, так как

$$\frac{b^4}{p^2} = 4a^2,$$

то

$$\int_0^b y\,dF = \frac{4a^2b}{5}.$$

Далее $F = \frac{4}{3}ab$. Отсюда находим

$$y_0 = AD = \frac{4a^2b \cdot 3}{5 \cdot 4ab} = \frac{3}{5}a; \quad y_1 = DH = \frac{\int y^2\,dF}{y_0F}.$$

Здесь

$$\int y^2\,dF = \int_0^b \frac{x^4}{4p^2} \cdot \frac{2x^2}{p}\,dx = \frac{4}{7}a^3b; \quad y_0 = \frac{3}{5}a; \quad F = \frac{4}{3}ab.$$

Отсюда

$$y_1 = DH = \frac{5}{7}a; \quad (y_1 - y_0) = AH = \frac{4}{35}a; \; y_0(y_1 - y_0) = AD \cdot AH = \frac{12}{175}a^2.$$

И на этот раз (см. примеч. 128)

$$x_0(x_1 - x_0) = AB \cdot AL = OA \cdot AN = \frac{\int x^2\,dF}{F},$$

где x — расстояние частицы от оси, F — площадь половины параболического сегмента и где интеграл также распространяется на половину сегмента. Здесь элемент объема

$$dF = (a - y)\,dx = \left(a - \frac{x^2}{2p}\right)dx;$$

$$\int_0^b x^2\,dF = \frac{2}{15}ab^3;$$

$$F = \frac{2}{3}ab,$$

$$AB \cdot AL = \frac{1}{5}b^2.$$

Следовательно, площадь, которую надо делить, равна

$$\frac{12}{175}a^2 + \frac{1}{5}b^2.$$

[134] Если подвесить параболический сегмент в вершине, то

$$r_0 = y_0 = \frac{3}{5} a;$$

$$l - r_0 = \frac{\frac{12}{175} a^2 + \frac{1}{5} b^2}{\frac{3}{5} a} = \frac{4}{35} a + \frac{1}{3} \frac{b^2}{a};$$

$$l = \frac{5}{7} a + \frac{2}{3} p.$$

Если подвесить параболический сегмент в середине основания, то

$$r_0 = a - \frac{3}{5} a = \frac{2}{5} a;$$

$$l - r_0 = \frac{\frac{12a^2}{175} + \frac{b^2}{5}}{\frac{2}{5} a} = \frac{6}{35} a + \frac{1}{2} \frac{b^2}{a},$$

$$l = \frac{4}{7} a + p.$$

[135] Здесь Гюйгенс, так сказать, переходит от картезианских к полярным координатам.

[136] См. предложение VIII этой части.

[137] Выражение, подлежащее делению, есть

$$\frac{\int y^2 dV}{V} = BR^2 = r^2.$$

Если окружность подвешена в G, то $r_0 = r$;

$$l - r_0 = l - r = \frac{r^2}{r} = r;$$

$$l = 2r.$$

[138] Правильный многоугольник разбивается на равные треугольники. Для одного из них, например для треугольника CED, выражение

$$\frac{\int y^2 dF}{F} = y_0 y_1,$$

следовательно (см. примеч. 123),

$$\frac{\int y^2\,dF}{F}=\frac{2}{3}h\cdot\frac{3}{4}h=\frac{1}{2}h^2$$

Далее (см. примеч. 128)

$$\frac{\int x^2\,dF}{F}=\frac{1}{24}s^2.$$

Таким образом, для каждого треугольника нашего многоугольника выражение, подлежащее делению на длину, будет

$$\frac{1}{2}h^2+\frac{1}{24}s^2.$$

Для всего многоугольника надо числитель и знаменатель помножить на n, и выражение получается то же (n — число сторон многоугольника).

139 Для каждой стороны в $\int y^2\,dL$ y постоянно и равно h; таким образом,

$$\frac{\int y^2\,dL}{L}=h^2.$$

Также для каждой стороны $\dfrac{\int x^2\,dL}{L}=\xi_0\xi_1$, где ξ_0 — расстояние центра тяжести половины стороны от центра стороны.

$$\xi_0=\frac{1}{4}s;$$

ξ_1 — предельное значение субцентрики над половиной стороны, т. е. (ср. предложение XXI)

$$\xi_1=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}s=\frac{1}{3}s,$$

таким образом,

$$\frac{\int x^2\,dL}{L}=\frac{1}{12}s^2.$$

Отсюда для каждой стороны выражение, подлежащее делению, равно

$$\frac{\int y^2\,dL}{L}+\frac{\int x^2\,dL}{L}=h^2+\frac{1}{12}s^2.$$

Для всего периметра надо опять помножить числитель и знаменатель на n (число сторон), и дробь останется без изменения.

140 Дословный перевод гласил бы: „Использование геометрического места в плоскости и в пространстве (loci plani et solidi usus) в этой теории.

141 По определению клина, прямая, используемая для его построения, должна касаться фигуры. Поэтому над длиной OL вообще нельзя построить клина, используя прямую AH; если Гюйгенс все-таки говорит о клине, то он имеет в виду прямоугольник над OL, сверху ограниченный плоскостью, проведенной через AH под углом 45° к плоскости рисунка.

142 Так как в данном случае все части стержня находятся на той же высоте, как и центр тяжести, то просто

$$\frac{\int r'^2\,dL}{L}=\frac{\int x'^2\,dL}{L}=x_0\,(x_1-x_0),$$

где x_0—расстояние центра тяжести от OH, x_1 — субцентрика клина, построенного на OL с использованием прямой OH. Этот клин — прямоугольный треугольник, имеющий OH катетом.

$$x_0=OM;\quad x_1=OR;$$

$$\frac{\int r'^2\,dL}{L}=OM\cdot MR;\quad l-r_0=\frac{OM\cdot MR}{r_0}=\frac{OM\cdot ML}{AM}.$$

143 Пусть S — общий центр тяжести обоих треугольников, ξ и η — расстояние какой-либо части прямоугольника от линии, проведенной через S параллельно CG или соответственно AG. Тогда для каждого треугольника, учитывая малость угла при B,

$$\frac{\int \xi^2\,dF}{F}=\xi_0\,(\xi_1-\xi_0)=\frac{2}{3}\,x\left(\frac{3}{4}\,x-\frac{2}{3}\,x\right)=\frac{1}{18}\,x^2;$$

$$\frac{\int \eta^2\,dF}{F}=\eta_0\eta_1=\frac{2}{3}\,y\cdot\frac{3}{4}\,y=\frac{y^2}{2}.$$

Для двух треугольников надо помножить на два числителя и знаменателя левых сторон равенства, следовательно, правая сторона не изменится. Таким образом, „прямоугольник колебаний“ обоих треугольников есть

$$\frac{\int r'^2\,dF}{F}=\frac{1}{18}\,x^2+\frac{1}{2}\,y^2;$$

$$l-r_0=\frac{\frac{1}{13}\,x^2+\frac{1}{2}\,y^2}{r_0}=\frac{x^2+9y^2}{18r_0};$$

$$r_0=AS=a+\frac{2}{3}\,x.$$

И требуется

$$l = AL = b.$$

Мы получаем

$$b - a - \frac{2}{3}x = \frac{x^2 + 9y^2}{18a + 12x}.$$

Отсюда получается

$$y^2 = 2ab - 2a^2 - \frac{8}{3}ax + \frac{4}{3}bx - x^2.$$

144 Выше было показано, что вообще для кругового сектора

$$l - r_0 = \frac{\frac{1}{2}r^2 - \rho_0^2}{r_0},$$

где l — длина изохронного простого маятника; r_0 — расстояние от центра тяжести до точки подвеса; ρ_0 — расстояние между центром тяжести и центром круга. При этом

$$\rho_0 = \frac{2br}{3p};$$

ρ_0 зависит от длины дуги, принадлежащей круговому сектору.

Если l не должно зависеть от этой длины, то l не должно также зависеть от ρ. Назовем расстояние от точки подвеса до центра круга z, тогда

$$r_0 = z + \rho_0;$$

$$l - z = \frac{\frac{1}{2}r^2 - \rho_0^2}{z + \rho_0} + \rho_0 = \frac{\frac{1}{2}r^2 + \rho_0 z}{z + \rho_0},$$

$$l = z + z + \frac{\frac{1}{2}r^2 - z^2}{\rho_0 + z}.$$

Таким образом, l будет независимо от ρ, если

$$\frac{1}{2}r^2 - z^2 = 0.$$

В этом случае $z = \pm\frac{1}{2}r\sqrt{2}$, т. е. l не зависит от ρ, если точка подвеса отстоит от центра круга на $\frac{1}{2}r\sqrt{2}$ с одной или другой стороны.

В обоих случаях

$$l = 2z = r\sqrt{2}.$$

145 Уравнение круга имеет вид

$$(x - BF)^2 + y^2 = FO^2.$$

По построению

$$BF = BE + EF = \frac{4}{3} BE = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2} b - a\right) = \frac{2}{3} b - \frac{4}{3} a;$$

$$FO^2 = 2(AE^2 - EF^2) = 2\left[\left(\frac{1}{2} b\right)^2 - \left(\frac{1}{6} b - \frac{1}{3} a\right)^2\right] =$$

$$= 2\Big(\frac{1}{4} b^2 - \frac{1}{36} b^2 + \frac{1}{9} ab - \frac{1}{9} a^2 = \frac{4}{9} b^2 + \frac{2}{9} ab - \frac{2}{9} a^2.$$

Имеем

$$x^2 - \frac{4}{3} bx + \frac{8}{3} ax + \frac{4}{9} b^2 - \frac{16}{9} ab + \frac{16}{9} a^2 + y^2 =$$

$$= \frac{4}{9} b^2 + \frac{2}{9} ab - \frac{2}{9} a^2$$

и

$$y^2 = 2ab - 2a^2 - \frac{8}{3} ax + \frac{4}{3} bx - x^2.$$

146 Пусть $BC = a$; $AD = h$. Тогда и

$$OP = h; \quad VV = a;$$

$$FR = x; \quad OF = y;$$

$$FR : PV = EN^2 : DC^2 = AE^2 : AD^2 = OF^2 : OP^2,$$

$$x : \frac{a}{2} = y^2 : h^2,$$

$$y^2 = 2\frac{h^2}{a} x.$$

Все точки R образуют две дуги параболы с вершиной в O и осью $O\Omega$.

147 Имеем

$$OG = y_1 = \frac{\int y^2\, dF}{y_0 F}.$$

Здесь

$$dF = 2x\, dy = \frac{ay^2}{h^2} dy;$$

$$\int y^2\, dF = \frac{a}{h^2}\int_0^h y' dy = \frac{1}{5} ah^3;$$

$$y_0 = \frac{3}{4}h; \quad F = \frac{1}{3}ah;$$

$$OG = \frac{ah^3 \cdot 4 \cdot 3}{5 \cdot 3h \cdot ah} = \frac{4}{5}h.$$

148 Мы имеем

$$OF = y_0 = \frac{3}{4}h;$$

$$OG = y_1 = \frac{4}{5}h;$$

$$FG = y_1 - y_0 = \frac{1}{20}h;$$

$$OF \cdot FG = y_0(y_1 - y_0) = \frac{3}{80}h^2.$$

149 Нужно представить себе этот клин состоящим из ряда прямоугольных треугольников, прямые углы которых идут вдоль линии, проходящей через C перпендикулярно плоскости рисунка. Так как в каждом треугольнике субцентрика равна $\frac{2}{3}BC$, то это же будет иметь место и для всего клина.

150 Имеем

$$\Phi P = \xi_0 = \frac{\int x dF}{F},$$

здесь x — расстояние элемента площади от OP.

$$\int x\, dF = \int x(h-y)\, dx = \int_0^h \frac{ay^2}{2h^2}(h-y)\frac{ay}{h^2}\, dy = \frac{1}{40}a^2h.$$

$$F = \frac{1}{3}\frac{a}{2} \cdot h = \frac{1}{6}ah.$$

Отсюда

$$\Phi P = \xi_0 = \frac{3}{20}a = \frac{3}{10}PV.$$

151 PV поделено пополам в Δ.

Имеем

$$BD = \frac{1}{2}a; \quad BK = \frac{2}{3}a; \quad DK = \frac{2}{3}a - \frac{1}{2}a = \frac{1}{6}a;$$

$$BD \cdot DK = \frac{1}{12}a^2.$$

Далее

$$P\Phi=\frac{3}{20}a;\quad \Delta P=\frac{1}{4}a;$$

$$\frac{P\Phi}{\Delta P}=\frac{3\cdot 4}{20}=\frac{3}{5}.$$

Следовательно,

$$z:\frac{1}{12}a^2=3:5,$$

$$z=\frac{1}{20}a^2.$$

152 У конуса основание — круг, поэтому, если r — радиус круга, его субцентрика BK (ср. примеч. 109) равна $\frac{5}{4}r$.

Так как

$$BD=r,$$

то

$$DK=\frac{1}{4}r;\quad P\Phi=\frac{3}{10}r;\quad \Delta P=\frac{1}{2}r.$$

Отсюда

$$Z=\frac{BD\cdot DK\cdot P\Phi}{\Delta P}=\frac{3}{20}r^2.$$

Можно также по заключительному замечанию к предложению XV сразу написать (так как конус — тело вращения)

$$Z=\Delta P\cdot P\Phi=\frac{1}{2}r\cdot\frac{3}{10}r=\frac{3}{20}r^2.$$

153 Радиус шара равен r, тогда

$$OH=2r;\quad VV=2r.$$

Какая-либо точка кривой OVH имеет расстояние от $OP=x$ и от $PV=y$.

Соответствующая точка круга ACD отстоит от оси AE на расстояние ξ и от EC на η. Тогда

$$y=\eta;$$

$$\frac{x}{PV}=\frac{\xi^2}{CE^2}$$

или

$$\frac{x}{r}=\frac{\xi^2}{r^2}=\frac{r^2-\eta^2}{r^2}=\frac{r^2-y^2}{r^2};$$

$$y^2=r(r-x).$$

Кривая OVH есть, следовательно, парабола с осью VP и вершиной в V.

[154] В примеч. 133 мы нашли, что расстояние между вершиной параболы и центром тяжести параболического сегмента равно $\frac{3}{5}a$, где a — отрезок оси сегмента. Следовательно, тут

$$V\Phi = \frac{3}{5} PV;$$

$$\Phi P = \frac{2}{5} PV.$$

[155] У цилиндра пропорциональная фигура есть прямоугольник с высотой h и основанием $2r$.

Субцентрика y_1 клина, построенного на прямоугольнике, с использованием верхней стороны (см. примеч. 122) равна

$$\frac{\int y^2\,dF}{F} = y_1 = \frac{2}{3}h.$$

Таким образом,

$$\frac{\int y_1^2 dF}{F} = y_0(y_1 - y_0) = \frac{1}{2}h\left(\frac{2}{3}h - \frac{1}{2}h\right) = \frac{h^2}{12}.$$

Так как цилиндр есть тело вращения, то и у него

$$\frac{\int x_1^2 dV}{V} = \Delta P \cdot P\Phi,$$

а так как пропорциональная фигура — прямоугольник, то

$$\frac{\int x_1^2 dV}{V} = \frac{1}{2}r \cdot \frac{1}{2}r = \frac{1}{4}r^2.$$

Таким образом, площадь, подлежащая делению, равна

$$\frac{1}{12}h^2 + \frac{1}{4}r^2$$

или

$$l - r_0 = \frac{\frac{1}{12}h^2 + \frac{1}{4}r^2}{r_0}.$$

Если цилиндр подвешен в середине своего основания, то

$$l-\frac{h}{2}=\frac{1}{6}h+\frac{1}{2}\frac{r^2}{h};$$

$$l=\frac{2}{3}h+\frac{1}{2}\frac{r^2}{h}.$$

[156] Под параболическим коноидом Гюйгенс понимает тело, получающееся от вращения прямого параболического сегмента.

Если ξ — расстояние точки параболы от оси, η — расстояние от горизонтальной линии, проведенной через вершину, то

$$\xi^2=2p\eta.$$

Если x и y — соответствующие расстояния точки, которая на линии, ограничивающей пропорциональную фигуру, соответствует точке $(\xi,\ \eta)$, тогда

$$y=\eta;$$

$$\frac{x}{r}=\frac{\xi^2}{r^2}=\frac{2p\eta}{r^2}=\frac{2py}{r^2};$$

$$y=\frac{r}{2p}x.$$

Это уравнение прямой линии; следовательно, пропорциональная фигура есть равнобедренный треугольник с основанием $2r$ и высотой h. У равнобедренного треугольника (ср. стр. 168) прямоугольник качания равен

$$\frac{\int r'^2dF}{F}=\frac{1}{18}h^2+\frac{1}{24}g^2,$$

где h — высота, g — основание треугольника. Следовательно, и у параболического коноида

$$\frac{\int r'^2dV}{V}=\frac{1}{18}h^2+\frac{1}{24}(2r)^2=\frac{1}{18}h^2+\frac{1}{6}r^2.$$

Если параболический коноид подвешен в вершине, то

$$r_0=\frac{2}{3}h;$$

$$l-r_0=\frac{\frac{1}{18}h^2+\frac{1}{6}r^2}{\frac{2}{3}h}=\frac{1}{12}h+\frac{1}{4}\frac{r^2}{h};$$

$$l=\frac{3}{4}h+\frac{1}{4}\frac{r^2}{h},$$

так как

$$r^2 = 2ph,$$

то также

$$l = \frac{3}{4} h + \frac{1}{2} p.$$

[157] Соответственно параболическому коноиду Гюйгенс понимает под гиперболическим коноидом тело, получающееся путем вращения прямого гиперболического сегмента.

[158] Пусть точка на гиперболе отстоит от прямых AD и AP на ξ и η, а соответствующая точка на кривой AKB на x и y, тогда уравнение гиперболы будет

$$\frac{(\eta - a)^2}{a^2} - \frac{\xi^2}{b^2} = 1,$$

где $2a$ и $2b$ — главная и побочная оси гиперболы. Положим основание $BB = 2r$, тогда

$$y = \eta;$$

$$\frac{x}{r} = \frac{\xi^2}{r^2};$$

$$rx = \xi^2 = \frac{b^2}{a^2} (\eta^2 + a^2) - b^2 = \frac{b^2}{a^2} (y + a)^2 - b^2;$$

$$(y + a)^2 = \frac{a^2}{b^2} r \left(x + \frac{b^2}{r}\right).$$

Следовательно, AKB — парабола, вершина которой лежит на длину a выше прямой AP, т. е. на той же высоте, как и центр гиперболы, и ось которой параллельна прямой AB и прямой BB.

[159] Сохраним обозначения предыдущего замечания, прибавив

$$AD = h.$$

Имеем

$$AL = \eta_0 = \frac{\int \eta dV}{V};$$

$$dV = \pi\xi^2 d\eta = \pi \left\{\frac{b^2}{a^2} (\eta + a)^2 - b^2\right\} d\eta = \pi \frac{b^2}{a^2} (\eta^2 + 2a\eta)\, d\eta;$$

$$V = \frac{\pi b^2}{a^2} \int_0^h (\eta^2 + 2a\eta)\, d\eta = \frac{\pi}{3} \frac{b^2}{a^2} h^2 (h + 3a);$$

$$\int \eta\, dV = \pi \frac{b^2}{a^2} \int (\eta^3 + 2a\eta^2)\, dV = \frac{\pi}{12} \frac{b^2}{a^2} h^3 (3h + 8a);$$

$$AL = \frac{\pi b^2 h^3 (3h + 8a)\, 3a^2}{12a^2 \pi b^2 h^2 (h + 3a)} = \frac{3h + 8a}{4h + 12a} \cdot h.$$

Последнее уравнение совпадает с пропорцией Гюйгенса, надо только заменить FA через $2a$ и AD через h.

[160] Расчет утомителен, хотя и не затруднителен. Центр тяжести половины $ADBK$ отстоит от AD на x_0

$$P\Phi = x_0 = \frac{\int x\,dF}{F} = \frac{b^2h\,(20a^2+15ah+3h^2)}{10a^2r\,(3a+h)}.$$

Субцентрика y_1 клина, построенного на $BKAKB$ с использованием прямой AP, равна

$$y_1 = \frac{\int y^2\,dF}{y_0F} = \frac{6\,(2h+5a)}{5\,(3h+8a)}\,h.$$

Так как далее

$$\Delta P = \frac{1}{2}\,r;$$

$$y_0 = \frac{3h+8a}{4\,(h+3a)}\,h,$$

то известен прямоугольник качания

$$= \Delta P\Phi + y_0\,(y_1 - y_0).$$

Если

$$AD = AF,$$

т. е.

$$h = 2a,$$

то

$$b^2 = \frac{1}{8}\,r^2;$$

$$y_0 = \frac{7}{10}\,h;$$

$$y_1 = \frac{27}{35}\,h;$$

$$P\Phi = \frac{31}{100}\,r.$$

Таким образом, в этом случае прямоугольник качания

$$y_0\,(y_1 - y_0) + \Delta P\cdot P\Phi = \frac{1}{20}\,h^2 + \frac{31}{200}\,r^2.$$

[161] Должна существовать пропорция

$$\frac{\frac{2}{3} BC}{BE} = \frac{\frac{1}{4} 2\pi r}{r} = \frac{\pi}{2}.$$

Центр тяжести полукруга проще всего найти по правилу Гульдииа следующим образом. Пусть расстояние от центра тяжести до центра круга равно x. Имеем

$$\frac{1}{2}\pi r^2 \cdot 2\pi x = \frac{4}{3}\pi r^3;$$

$$x = \frac{4}{3\pi} r.$$

Следовательно, E действительно центр тяжести полуокружности.

[162] Доказательство то же, что и у треугольника. Мысленно разделим конус плоскостями, параллельными основанию, на ряд плоских слоев. Каждый раз соответственные слои будут изохронны (по теореме XVI), а следовательно, и сами конусы изохронны.

[163] Период колебаний при размахе в 6° относится к периоду при „бесконечно малой" амплитуде, как 1.0007 к 1.

[164] Отсюда длина секундного маятника определяется в 99.45 см, в то время как более точное значение для Парижа 99.39 см.

[165] Это прямо видно из формулы

$$ES = \frac{r^2}{AE}.$$

[166] Лион, а не Лейден, как ошибочно пишет немецкий комментатор,

[167] Если диаметр шара составляет $\frac{1}{30}$ длины нити, то расстояние от точки подвеса до центра шара относится к расстоянию от точки подвеса до центра качания, как 9000 к 9001.

[168] Здесь Гюйгенс вводит единицу времеии: терция, шестидесятая часть секунды.

[169] Этот путь, проходимый в первую секунду, равен половине ускорения. По Гюйгенсу, для g в сантиметрах получилось бы значение 979.9, в то время как значение для Парижа равно 980.9.

[170] Сохранились вычисления Гюйгенса по вопросу о сопротивлении газов (и жидкостей) движению.

К мемуару „О движении тел под влиянием удара“

[1] Исследование „О движении тел под влиянием удара“ (De motu corporum ex percussione) было опубликовано в посмертных трудах Христиана Гюйгенса, изданных в Лейдене в 1703 г. под редакцией профессоров Бурхера де-Фолдера и Бернгарда Фуллениуса.* В этом издании впервые даны доказательства всех теорем Гюйгенса, относящихся к соударениям тела. В 1728 г. трактат был перепечатан в изданных под редакцией Гравезанда „Opera reliqua“ (т. II, стр. 73—104).

[2] Гюйгенс пишет „corpus durum“ — твердое тело. Прилагательное „durum“, в отличие от „solidum“, означает не только твердое, но и жесткое, так сказать, абсолютно твердое. В переводе мы ограничиваемся словом „твердое“.

Удар твердых тел представляет большие трудности для рассмотрения. Гюйгенс разбирает в сущности удары абсолютно упругих тел. Это заметил еще Ньютон,** в своих „Математических началах“. Ньютон пишет: „По теории Рена и Гюйгенса, тела абсолютно твердые отскакивают одно от другого со скоростью, равной скорости встречи. Точнее это следовало бы сказать о телах вполне упругих“.

[3] В гипотезе II Гюйгенс имеет в виду величину скорости, не учитывая знака. Это замечание надо принимать в расчет при многих формулировках Гюйгенса.

[4] Определение прямого удара должно быть дополнено требованием, чтобы общая касательная плоскость в точке касания была перпендикулярна к указанной прямой линии. Следует, впрочем, заметить, что Гюйгенс иногда заменяет слово „corpus“, (тело) словами „globus“ или „globulus“ (шар, шарик) и делает это в разных местах без всяких специальных оговорок (напр. в части доказательства теоремы IX). На всех рисунках трактата также изображены шары.

[5] Алгебраически гипотезу III можно выразить таким образом. Если справедливо соотношение

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2, \tag{1}$$

---

* Christiani Hugenii opuscula postuma, Lugduni Batavorum, 1703, pp. 369—398. Точное заглавие дано на рисунке, изображающем титул книги (стр. 363).

** Исаак Ньютон. Математические начала натуральной философии. Пер. акад. А. Н. Крылова. Собр. соч. акад. А. Н. Крылова, т. VII, Изд. АН СССР, 1936. Указанное утверждение находится на стр. 53.

т. е. закон сохранения количества движения, то справедливо и соотношение

$$m_1(v_1+v)+m_2(v_2+v)=m_1(V_1+v)+m_2(V_2+v) \quad (2)$$

при любом значении v. И наоборот, если справедливо (2), то справедливо и (1). Здесь m_1, m_2 — массы соударяющихся тел; v_1, v_2, V_1 и V_2 — их скорость до и после удара; v — общая скорость обоих тел.

Гипотезы играют роль аксиом в геометрических рассуждениях Гюйгенса. Но каждая из них устанавливает некоторые физические истины. В отношении к гипотезам Гюйгенс существенно отличается от Ньютона и не разделяет его скептицизма. Ньютон, наверное, употребил бы в этом случае слово „axioma" или „lex". Из трех первых гипотез, с которых Гюйгенс начинает свой трактат, видно, что он рассматривает вполне упругий удар и исходит из закона инерции и из так называемого классического принципа относительности, обычно называемого „галилеевым", который голландцы склонны называть „гюйгенсовым".

Не касаясь вопроса о названии, не столь существенного, нельзя все же не признать, что Гюйгенс был первым ученым, успешно и разнообразно применившим классический принцип относительности как орудие исследования.

Применение этого принципа мы находим не только во всех теоремах трактата о движении тел под влиянием удара, но также и в трактате о центробежной силе.

[6] Для шаров никакого дополнения к гюйгенсовскому определению прямого удара не требуется.

[7] Гюйгенс употребляет слово „propositio" (предложение). В рассуждениях Гюйгенса „предложения" играют ту же роль, что и „теоремы" в курсах геометрии. Словом „theorema" Гюйгенс пользуется лишь в одном месте „Маятниковых часов", где перечислены „теоремы о центробежной силе", и кроме того, в разных вариантах его рукописей.

[8] При равенстве масс шаров, соударяющихся с равными скоростями, уравнение (2) примеч. 2 принимает, согласно гипотезе II, вид тождества

$$mv_1+m(-v_1)=m(-v_1)+mv_1. \quad (3)$$

Прибавление общей скорости v, равной v_1, приводит к тождеству

$$m(2v_1)+m\cdot 0=m\cdot 0+m(2v_1). \quad (4)$$

Этим доказывается первая теорема.

[9] Требуемый результат получается из уравнения (3) предыдущего примечания путем прибавления общей скорости v и введения обозначений

$$v+v_1=V_1 \quad \text{и} \quad v+v_2=V_2. \quad (5)$$

[10] Применяемый Гюйгенсом геометрический метод рассуждений заставляет его разбирать многие частные случаи и подчас делает его выводы очень громоздкими. Это, в частности, относится к выводу теоремы VIII.

[11] Третье предложение Гюйгенса опровергает четвертое правило Декарта для удара тел, согласно которому „при ударе тела B с какой угодно скоростью о хоть несколько большее тело C, последнее тело (т. е. C) остается в покое, а тело B отскакивает в обратную сторону“.

[12] Левой — со стороны смотрящего на рисунок.

[13] Пусть массы тел m_1 и m_2, их скорости до удара v_1 и v_2, после удара V_1 и V_2. Требование сохранения скорости (по величине), очевидно, означает

$$V_1 = -v_1 \quad \text{и} \quad V_2 = -v_2.$$

Случай $V_1 = v_1$ и $V_2 = v_2$ исключается, так как тогда не было бы никакого удара. Тогда уравнение (1) примечания 5 напишется так:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = -m_1v_1 - m_2v_2 \tag{6}$$

или

$$\frac{v_1}{v_2} = -\frac{m_2}{m_1}. \tag{7}$$

Таким образом, выполнение условий гипотезы V требует определенного соотношения масс и скоростей. Как Гюйгенс решает вопрос, не вводя явно понятия массы, видно из решения предложения VIII.

[14] Сущность рассуждения Гюйгенса, выраженная на языке алгебры, — следующая. Пусть скорости двух тел A и B относительно лодки до удара равны 0 и v_2, после удара — V_1 и V_2, пусть лодка имеет скорость $-\frac{V_1}{2}$, тогда скорость тела A относительно берега будет $\frac{V_1}{2}$ — до удара и $+\frac{V_1}{2}$ — после удара, т. е. скорость сохранила величину, но изменила знак. То же должно быть, согласно гипотезе V, и со скоростью тела B относительно берега. До удара она была $v_2 - \frac{1}{2}V_1$, следовательно, после удара она равна $\frac{1}{2}V_1 - v_2$. Легко видеть, что относительная скорость тела B относительно тела A до удара (скорость сближения) равна v_2, а относительная скорость тела B относительно A после удара (скорость удаления) равна v_2. Таким образом, формулировка, учитывающая знак, должна была бы быть такой: *относительная скорость сближения тела B с телом A равна относительной скорости удаления тела A от тела B.* Формулировав предложение IV, Гюйгенс нашел первый общий закон упругого удара.

[15] В предложении V Гюйгенс формулирует принцип обратимости, отличающий упругий удар от неупругого. В алгебраической форме ход рассуждения Гюйгенса следующий.

Пусть в лодке происходит соударение тел A и B. Их скорости относительно лодки v_1 и v_2 — до удара, V_1 и V_2 — после удара. Пусть лодка имеет скорость $v_1 + V_1$; заменим после удара V_1 на $-V_1$ и V_2 на $-V_2$. Тогда скорость тела A относительно берега будет v_1, а скорость тела B относительно берега $-V_2 + v_1 + V_1$, но по предложению IV $V_1 - V_2 = v_2 - v_1$, следовательно, скорость тела B относительно берега есть v_2. Отсюда ясно, что скорости обоих тел относительно берега после нового соударения будут V_1 и V_2. Скорости тех же тел относительно лодки будут $V_1 - v_1 - V_1 = -v_1$ и $V_2 - v_1 - V_1 = (v_1 - v_2) - v_1 = -v_2$.

Таким образом, теорема верна для лодки, а следовательно, и везде.

[16] Формулировка предложения VI резко противоречит утверждению Декарта в параграфе 36 второй части его „Принципов философии", где сказано: „Бог есть первая причина движения и количество движения вселенной всегда сохраняет свою величину". В статье в „Journal des Sçavans" дана другая формулировка предложению VI*, а именно: „Количество движения, которое имеют два тела, может увеличиваться или уменьшаться при столкновении; но его величина остается постоянной в ту же сторону [в том же направлении], если мы вычтем количество движения обратного направления".

Таким образом, Гюйгенс правильно формулирует закон сохранения количества движения в определенном направлении. Не яено, почему он в окончательной рукописи дает менее определенную формулировку.

В статье в „Journal des Sçavans" есть и другое замечательное место: „Кроме того, я заметил удивительный закон природы [une loy** admirable de la nature], который я могу доказать для сферических тел и который, повидимому, справедлив и для всех других тел, твердых [упругих] и мягких [неупругих] при прямом и при косом ударе: «общий центр тяжести двух или трех или скольких угодно тел продолжает двигаться равномерно в ту же сторону по прямой линии как до, так и после удара»".

И это замечательное открытие Гюйгенс не поместил в окончательную рукопись. Его доказательство не сохранилось. Для нас, привыкших мыслить понятиями механики Ньютона, закон движения центра тяжести является прямым следствием закона сохранения количества движения,

* Journal des Sçavans от 18 марта 1669, стр. 19—24. Указанная формулировка составляет пятый пункт.

** Старинное правописание.

и непонятно, для чего понадобилась Гюйгенсу сферическая форма тел. Правда, и Гюйгенс догадывается, что его закон, повидимому, справедлив и вообще.

[17] Гаусдорф указывает на неудачность формулировки Гюйгенса в этом случае, так как разделение движения между двумя равными телами, причем одно движется со скоростью AC, а другое со скоростью AD, на самом деле не имеет места. Вся скорость BA перейдет к телу A, а тело B остановится. У самого Гюйгенса это понятие составляет предложение I. Однако неудачная формулировка не меняет правильности вывода.

[18] В подлиннике стоит слово „magnitudo“ (величина). Немецкий переводчик (или редактор) переводит это слово словом „масса“. В комментарии к следующей теореме он пишет: „Введение масс представляло главную трудность теории удара“. Любопытно посмотреть, как оба современника Гюйгенса преодолевают эту трудность. Уоллис непосредственно исходит из количества движения. Оно есть то, что при ударе переходит от тела к телу и в целом сохраняется. Рен заявляет, что скорости, обратно пропорциональные массам, суть настоящие и наиболее естественные скорости тел (velocitates propriae et maxime naturales) и потому сохраняются при ударе. Другие, отступающие от этого требования отношения скоростей суть „неподобающие“ и переходят в отношения, отступающие в другую сторону наподобие качаний весов в ту и другую сторону. Само собой понятно, что такое вуалирование трудностей не могло удовлетворить такого мыслителя, как Гюйгенс.

Все-таки перевод слова „magnitudo“ словом „масса“ вряд ли правилен. Для нас термин „масса“ имеет совершенно определенное значение и связан с законом Ньютона. Употребление этого термина вне этой связи не допустимо. Наконец, и у Гюйгенса слово „масса“ не встречается ни в одном из трех мемуаров, составляющих содержание данной книги. В письме Гюйгенса в „Journal des Sçavans“ имеется следующее любопытное место, заключающее его правила (ввиду его важности, цитирую это место в подлиннике и с соблюдением старой орфографии: „Je considère en tout cecy des corps d'une mesme matrière, on bien jéntends que leur grandeur soit estimeé par le poids“. В переводе на русский язык это означает: „При всем этом (т. е. при всех этих правилах) я рассматриваю тела из одного и того же вещества, или же принимаю, что величина тел определяется их весом“.

Итак, мерой величины тела для Гюйгенса является вес. Мы знаем, конечно, из механики Ньютона, что вес пропорционален массе. Следовательно, гюйгенсова „величина“ тела пропорциональна также массе. Все выводы Гюйгенса правильны, но все-таки это не дает нам права заменять слово „величина“ словом „масса“. Такая замена была бы неоправданным необходимостью изменением текста классика. Вероятно, такими же причинами руководились и голландские издатели „Oeuvres complètes de Christiaan Huygens", правильно переводя слово „magnitudo" (величина) на французский язык словом „grandeur".

19 Величина тела, по Гюйгенсу, определяется его весом, а следовательно, пропорциональна массе (см. примеч. 18).

20 Этот закон, установленный Галилеем, нужен Гюйгенсу в такой форме: „Квадрат конечной скорости падающих тел пропорционален высоте падения и всегда одинаков независимо от того, падает ли тело свободно или вдоль какой-либо плоской или кривой поверхности, т. е. независимо от того, будет ли конечная скорость вертикальна, наклонна или горизонтальна".

21 Из рукописей Гюйгенса видно, что механизмы превращения вертикальной скорости в горизонтальную, или обратно, он мыслил себе как удар о наклонную под углом 45° абсолютно упругую плоскость.

22 Принцип, что никакое движение системы весомых тел, происходящее под влиянием сил тяготения, не может поднять центр тяжести этой системы выше первоначального положения, является одной из самых замечательных и плодотворных идей Гюйгенса. С помощью ее он решил ряд разнообразных проблем механики. В области динамики Гюйгенс применяет этот принцип в вышеприведенной форме. Самым замечательным случаем применения этого принципа было решение задачи о физическом маятнике. Для задач статики Гюйгенс дает своему принципу форму: при равновесии тела или системы тел, находящихся под действием сил тяготения, центр тяжести занимает самое низкое из всех возможных положений. Так были Гюйгенсом решены вопросы о цепной линии и о равновесии плавающих тел.

Гюйгенс вполне сознавал общее значение своего принципа. В полемике* с современниками он, защищая этот принцип, указывал, что нарушение его привело бы к возможности построения вечного двигателя. И действительно, его принцип эквивалентен закону сохранения энергии в механической консервативной системе для частного случая равномерного гравитационного поля.

23 Гаусдорф дает следующую очень наглядную модернизированную форму вывода Гюйгенса. Начальные скорости v_1 и v_2 масс m_1 и m_2 приобретены путем падения с высот h_1 и h_2; тогда $v_1^2 = 2gh_1$, $v_2^2 = 2gh_2$. Общий центр тяжести первоначально находился на высоте h. Мы имеем

$$h = \frac{m_1 h_1 + m_2 h_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2}{2g\,(m_1 + m_2)}.$$

---

* См. статью: „Работы Гюйгенса по механике" в настоящем издании.

Скорости после удара V_1 и V_2 используются в обратном смысле для поднятия масс на высоты k_1 и k_2; при этом $V_1^2 = 2gk_1$ и $V_2^2 = 2gk_2$.

Центр тяжести системы достигает высоты

$$k = \frac{m_1 k_1 + m_2 k_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2}{2g\,(m_1 + m_2)}.$$

Согласно аксиоме о центре тяжести, должно быть

$$h \leqslant k.$$

Если на момент отвлечься от рассуждения Гюйгенса, то можно было бы „повернуть“ удар (по предложению V); тогда по той же причине

$$h \leqslant k.$$

Следовательно, остается $h = k$, т. е.

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2. \tag{8}$$

Это не что иное, как содержание предложения XI (см. далее), т. е. сохранение „живой силы“ или кинетической энергии. Упругий удар есть консервативный процесс, в отличие от неупругого, связанного с потерей кинетической энергии с компенсацией тепловой энергией.

Гюйгенс еще не использует уравнения (8), но ограничивается выражением

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 \geqslant m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2. \tag{9}$$

Рассматривается случай $m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$ и утверждается, что $V_1 = -v_1$, $V_2 = -v_2$. Доказательство Гюйгенса может быть сведено к следующему.

Предположим, что V_1 не равно $(-v_1)$; в этом случае положим $V_1 = -v_1 + x$. Тогда, согласно предложению IV,

$$V_2 = -v_2 + x.$$

Подставляем эти значения V_1 и V_2 в выражение $m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2$. Это дает

$$m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - 2x\,(m_1 v_1 + m_2 v_2) + (m_1 + m_2)\,x^2 =$$
$$= m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + (m_1 + m_2)x^2 \geqslant m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2.$$

Это противоречит (9), остается принять $x = 0$.

[24] В алгебраической форме общее правило, вытекающее из построения Гюйгенса, представляется в следующем виде.

Обозначим массы („величины") тел A и B через m_1 и m_2; их скорости до удара v_1 и v_2, скорости после удара V_1 и V_2; обозначим через M сумму $(m_1 + m_2)$.

Скорости считаются положительными, когда они направлены слева направо. Имеем по фиг. 15:

$$MV_1 = M \cdot EA = M \cdot CA + M \cdot EC = -M \cdot AC + M \cdot CD =$$
$$= -M \cdot AC + M(AD - AC) = M \cdot AD - 2MAC =$$
$$= -Mv_1 - 2m_2AB = Mv_1 - 2m_2(v_1 - v_2),$$

отсюда

$$V_1 = v_1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2). \tag{10}$$

Аналогично:

$$MV_2 = M \cdot EB = M \cdot CB + M \cdot EC = M \cdot CB + M \cdot CD =$$
$$= M \cdot CB + M(CB + BD) = M \cdot BD + 2M \cdot CB =$$
$$= Mv_2 + 2m_1AB = Mv_2 + 2m_1(v_1 - v_2),$$

откуда

$$V_2 = v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2). \tag{11}$$

Это обычные современные формулы для прямого упругого удара шаров (без учета возникающих при ударе колебаний).

25 Из формулы (10) примеч. 24 видно, что правильнее было бы сказать: „Разность между скоростью A до удара и скоростью C" дает скорость A после удара.

26 Это соотношение легко проверяется по формулам (10) и (11) примеч. 24.

27 Согласно геометрическому характеру своего рассуждения, Гюйгенс называет каждую из величин $(CB \cdot AD^2)$, $(CA \cdot BD^2)$, $(CB \cdot EA^2)$ и $(CA \cdot EB^2)$ „solidum", т. е. объемом геометрического тела. Мы не передали этого оттенка в своем переводе.

28 Обозначим CD через a, AC через $a - e$, DB через $a + f$, где a, e, f положительны, $a > e$.

Необходимо доказать неравенство

$$(2a - e)(2a + f) < 2[a(a - e) + a(a + f)].$$

Справедливость неравенства легко проверяется (оно приводится к $-ef < 0$).

Легко показать, что неравенство остается справедливым и в случае $AC > CD > DB$. Гюйгенс этим пользуется в предложении XV, не приводя доказательства.

[29] Т. е. AC есть средняя пропорциональная между AB и AD.

[30] Приводим примечание Гаусдорфа к этому пункту. Если тело m_1, со скоростью v_1, ударяет о покоящееся тело m_3, то последнее приобретает скорость

$$V_3 = \frac{2m_1}{m_1 + m_3} v_1.$$

Если m_1 ударяет раньше в покоящееся тело m_2 и затем это тело со скоростью $V_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$ приводит в движение покоящееся тело m_3, то последнее приобретает скорость

$$W_3 = \frac{2m_2}{m_2 + m_3} v_2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)} v_1.$$

Отсюда следует

$$W_3 - V_3 = 2v_1 \frac{m_1 (m_1 - m_2)(m_2 - m_3)}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)(m_1 + m_3)}.$$

Если $m_1 > m_2 > m_3$ или $m_1 < m_2 < m_3$, то $W_3 > V_3$. Далее имеем

$$4m_1 \frac{v_1}{W_3} = \frac{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)}{m_2} = \frac{m_2^2 + m_1 m_3}{m_2} + m_1 + m_3 =$$
$$= \frac{(m_2 - \sqrt{m_1 m_3})^2}{m_2} + (\sqrt{m_1} + \sqrt{m_3})^2.$$

Первый член положителен и имеет наименьшее значение, равное нулю при $m_2 = \sqrt{m_1 m_3}$, тогда $4m_1 \frac{v_1}{W_3}$ имеет наименьшее, а следовательно, W_3 — наибольшее значение.

[31] В тексте теоремы и в доказательстве мы употребляем термин „геометрическая прогрессия“, которого у Гюйгенса нет. Гюйгенс говорит о непрерывном ряде пропорциональных величин („continua proportionalium series“), что соответствует геометрической прогрессии.

[32] Смысл предложения XIII ясен. Чем больше промежуточных тел будет помещено между крайними телами, тем ближе два соседних тела будут к равенству масс, и, следовательно, ударяющее тело будет почти останавливаться и передаст значительную часть своего количества движения покоящемуся. В пределе, при бесконечном числе промежуточных тел, можно полагать, что все количество движения передается на последнее тело. Расчеты подтверждают это рассуждение. При прямом ударе крайних тел на покоящееся тело передается только часть движения и при большом различии масс — только незначительная часть

Приводим расчет Гаусдорфа.

Пусть $m_0 = m_A$ и $m_n = M$ — оба крайних тела, $m_1, m_2 \ldots, m_{n-1}$ — включенные массы. Движение передается по порядку от тела m_0 на тело m_1, от тела m_1 на тело m_2, и т. д. Каждая масса m_i находится первоначально в покое и получает от массы m_{i-1} скорость v_i и приобретает после удара со следующей массой m_{i+1} скорость V_i. Для масс m_i и m_{i+1} мы по формулам упругого удара получаем

$$V_i = v_i \frac{m_i - m_{i+1}}{m_i + m_{i+1}}; \quad v_{i+1} = v_i \frac{2m_i}{m_i + m_{i+1}}.$$

По этим рекуррентным формулам надо вычислить ряд скоростей v_i. Для того, чтобы скорость последнего тела $v_c = v_n$ при заданном для первого тела $v_A = v_0$ имела максимальное значение, все $m_i = \sqrt{m_{i-1} m_{i+1}}$, т. е. массы должны представлять геометрическую прогрессию со знаменателем q

$$m_c = m_A q^n,$$

$$V_i = v_i \frac{1-q}{1+q}; \quad v_{i+1} = v_i \frac{2}{1+q}.$$

Скорости v составляют геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{2}{1+q}$

$$v_\varsigma = v_A \left(\frac{2}{1+q}\right)^n.$$

Количество движения последнего тела

$$m_c v_c = m_A v_A \left(\frac{2q}{1+q}\right)^n.$$

В примере Гюйгенса — 100 масс в отношении $1:2$ $(n = 99)$; для случая перехода движения от большего тела к меньшему $q = \frac{1}{2}$, и мы имеем:

$$v_c = v_A \left(\frac{4}{3}\right)^{99} = 2.3385 \cdot 10^{12} v_A.$$

Гюйгенс ошибся в вычислении и дает неправильную величину

$$1.476 \cdot 10^{10} v_A.$$

Обратно, для случая перехода движения от меньшего тела к большему, мы имеем $q = 2$ и количество движения последнего тела

$$m_c v_c = m_A v_A \left(\frac{4}{3}\right)^{99}$$

Для количества движения всех остальных масс мы должны получить $m_A v_A - m_c v_c$, так как общее количество движения должно сохранить свое значение $m_A v_A$ (при этом скорости должны быть взяты с надлежащим знаком.

Если образовать картезианское количество движения (все скорости считаются положительными), то надо (так как все v_i отрицательные) изменить знак у общего количества движения. Это дает $m_c v_c - m_A v_A$ и общее количество движения $2m_c v_c - m_A v_A$ или в примере Гюйгенса

$$m_A v_A \left[2\left(\frac{4}{3}\right)^{99} - 1\right] = 4.677 \cdot 10^{12} m_A v_A ,$$

как указывает Гюйгенс.

Наибольшее значение скорости v_c получается при передаче всей кинетической энергии первого тела на последнее тело, т. е. при $v_c = v_A \sqrt{\frac{m_A}{m_c}}$. Это значение можно получить, как предельное значение, при увеличении числа промежуточных тел до бесконечности $(n \to \infty)$. Последняя фраза представляет опять выпад против Декарта, согласно которому абсолютное количество движения во вселенной не может расти.

К мемуару „О центробежной силе“

[1] Трактат о центробежной силе опубликован только после смерти Гюйгенса в „Christiani Hugenii opuscula postuma“. 1703.

[2] Гюйгенс и в этом мемуаре руководится принципом относительного движения и рассматривает движение отлетающего по касательной тела относительно наблюдателя, движущегося по окружности с той же скоростью: это кажущееся движение, которое, например, имел бы относительно поверхности земли предмет, внезапно потерявший вес. Путь частицы, как показано в статье, есть кривая, возникающая при сматывании нити с окружности, т. е одна ветвь эвольвенты круга. В самом начале движения все обстоит так, как если бы тело тянули вверх силой, сообщающей ему центробежное ускорение.

[3] Назовем центробежные ускорения γ_1 и γ_2. I Предложение и последующие II, III и IV доказывают для случая равных масс 1 и 2 следующие пропорции:

I. Если $T_1 = T_2$, то $\gamma_1 : \gamma_2 = r_1 : r_2$.
II. „ $r_1 = r_2$, „ $\gamma_1 : \gamma_2 = v_1^2 : v_2^2 = \omega_1^2 : \omega_2^2$.
III. „ $v_1 = v_2$, „ $\gamma_1 : \gamma_2 = r_2 : r_1$.
IV. „ $\gamma_1 = \gamma_2$, „ $T_1 : T_2 = \sqrt{r_1} : \sqrt{r_2}$.

Из любых двух из этих теорем можно вывести общий случай. Т. е. прямую пропорциональность центробежного ускорения квадрату скорости и обратную пропорциональность радиусу. Удобнее всего из предложений II и III.

То, что Гюйгенс первоначально находит только пропорциональность, но не равенство этих величин, вызвано тем обстоятельством, что в предложении II определены не малые высоты падения EC и FD, а только их отношение.

[4] Здесь рассмотрение отношений заменено определением абсолютного значения, правда обходным путем. По законам Галилея $v=\sqrt{2qh}$. Следовательно, при падении с высоты $\frac{r}{2}$ скорость $v=\sqrt{gr}$ и $\frac{v^2}{r}=g$, так как в этом случае центробежное ускорение $\gamma=g$, то и вообще γ не только пропорциональна, но равна $\frac{v^2}{r}$. Следовательно, можно сказать, что основная формула центробежной силы содержится во II, III и V предложениях Гюйгенса.

[5] Если $\gamma=g$, то из основной формулы центробежной силы следует $r=\frac{gT^2}{4\pi^2}=\frac{H}{2\pi^2}$, если H — высота, с которой совершается падение; $H=\frac{1}{2}gT^2$. T вместе с тем время оборота.

1 рейнский фут $=12$ дюймам или унциям $=144$ линиям $=31.38$ см. Для $T=1$ сек. Гюйгенс берет $H=15$ фут. $7^1/_2$ дюйм. $=490.4$ см, соответственно ускорению 980.8 см/сек^2.

Диаметр круга равен $\frac{H}{2\pi^2}=19.00$ дюйм. $=49.7$ см.

[6] Для равновесия необходимо, чтобы равнодействующая веса и центробежной силы была бы направлена по нормали LH к образующей параболе. Так как $KL=p=$ полупараметру образующей параболы, то

$$g:\gamma=\operatorname{tg}KHL=p:r,$$

$$\gamma=\frac{g}{q}r=r\omega^2;\quad \omega=\sqrt{\frac{g}{p}};\quad T=2\pi\sqrt{\frac{p}{g}}.$$

Следовательно, время обращения — одно и то же для всех точек параболоида и равно искомому периоду колебания маятника длины p. Из постоянства ω немедленно следует, что поверхность тяжелой жидкости, вращающейся с угловой скоростью ω, будет параболоидом.

[7] Падение с высоты l совершается во время $\sqrt{\frac{2l}{g}}$; если это время должно совпадать с периодом обращения конического маятника, то

$$2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}=\sqrt{\frac{2l}{g}};\quad 2\pi\sqrt{L}=\sqrt{2l};$$

$$L:l=\sin\varphi=\frac{1}{2\pi^2}=0.05066;\quad \varphi=2^\circ54'14''.$$

[8] Обоснование этой и следующей теорем не вполне соответствует остальным доказательствам, так как Гюйгенс вводит новый элемент — соприкасающуюся с кругом параболу. Легко видеть, что для угла 60° $L=\frac{l}{2}$; $\gamma=\frac{2gL}{l}=g$. Общее натяжение $2g$.

[9] Можно несколько уточнить рассуждение Гюйгенса (по Гаусдорфу) к предложению XVII.

Если v_0 — скорость маятника в наивысшей точке, v — в наинизшей, то по законам падения тел

$$v^2-v_0^2=4gl$$

или

$$v^2=v_0^2+4gl.$$

Если $\gamma_0=\frac{v_0^2}{l}$ и $\gamma=\frac{v^2}{l}$ — соответственные центробежные силы, то

$$\gamma=\gamma_0+4g.$$

Но γ_0 в наивысшей точке должно быть по крайней мере равно ускорению g, так как иначе нить не будет натянута и маятник не опишет полного круга, но упадет по параболе внутри круга. Имеем

$$\gamma_0\geqslant g,$$

следовательно, натяжение в наинизшей точке равно

$$\gamma\geqslant 5g.$$

Натяжение нити в низшей точке f

$$f=\gamma+g\geqslant 6g.$$

Гюйгенс рассматривает только знак равенства, т. е. предельный случай $\gamma_0=g$; $\gamma=5g$. Но ясно, что любое увеличение скорости и соответственно центробежной силы выше низшего предела допустимо.

Так же точно можно на рис. 24 гвоздь забить в любую точку ниже D.

Следует обратить внимание на то, что здесь идет речь о маятнике на нити, а не на стержне. Для стержневого маятника нет нижнего предела для v_0 и γ_0; v_0 должно быть только вещественно

$$v_0\geqslant 0.$$

Имеем

$$v^2\geqslant 4gl;\quad \gamma\geqslant 4g;\quad \gamma+g\geqslant 5g.$$

Жесткий стержень должен быть в состоянии выдержать по крайней мере пятерной вес, а нить — шестерной вес тела, совершающего полные обороты в вертикальной плоскости.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Академии Наук СССР

*

Редактор издательства *П. И. Малявко*
Технический редактор *Р. С. Певзнер*
Корректоры *К. С. Тверитинова* и *Н. М. Шилова*

*

РИСО АН СССР № 4594. М-43359. Подписано к печати 13/X 1951 г. Тираж 2500. Бумага $70 \times 92/_{16}$. Бум. л. $11^7/_8$. Печ. л. 27.78. + 4 вкл. Уч.-изд. л. 18.65. № зак. 109.
Цена в переплете 19 руб.

1-я тип. Издательства Академии Наук СССР.
Ленинград, В. О., 9 лин., д 12.

Христиан Гюйгенс (1629—1695).

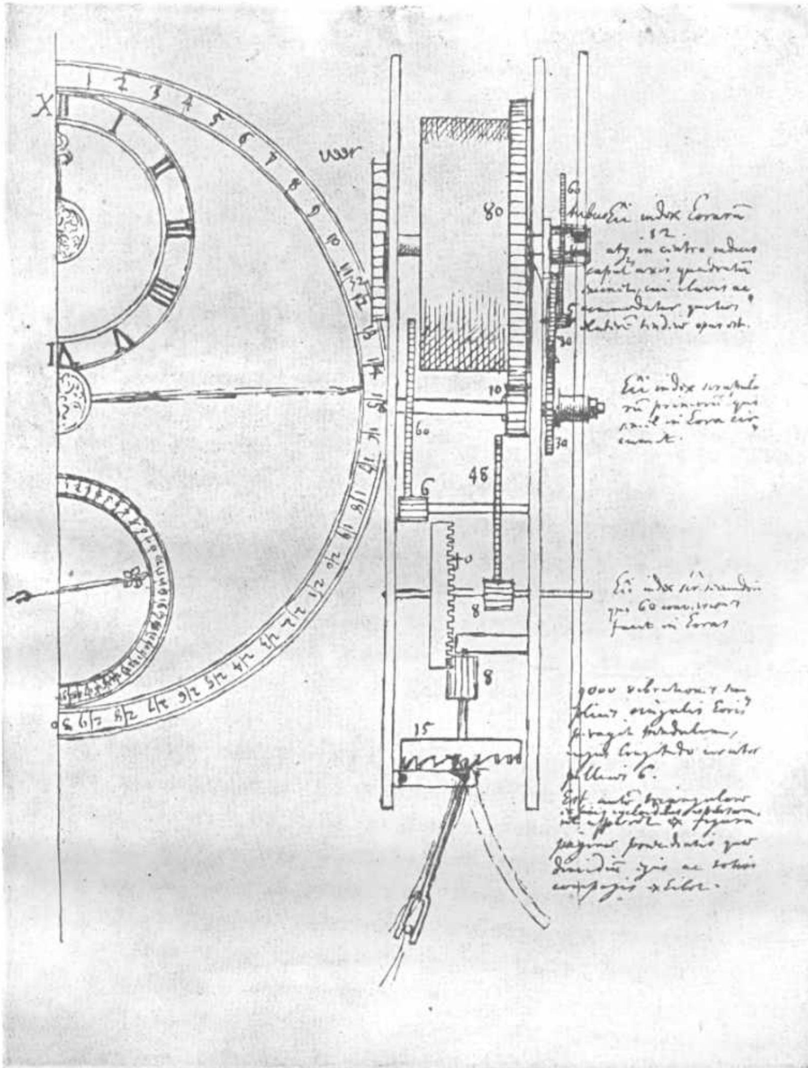


Рисунок и автограф X. Гюйгенса (первый вариант маятниковых часов).

CHRISTIANI
HVGENII
ZVLICHEMII, CONST. F.
HOROLOGIVM
OSCILLATORIVM
SIVE
DE MOTV PENDVLORVM
AD HOROLOGIA APTATO
DEMONSTRATIONES
GEOMETRICÆ.

PARISIIS,
Apud F. MUGUET, Regis & Illuſtriſſimi Archiepiſcopi Typographum, viâ Citharæ, ad inſigne trium Regum.
MDCLXXIII.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

Титульный лист первого издания мемуара „Маятниковые часы“.

CHRISTIANI HUGENII

Zelemii, dum viveret, Toparchæ

OPUSCULA
POSTUMA,

QUAE CONTINENT

DIOPTRICAM.

COMMENTARIOS

DE VITRIS FIGURANDIS.

Dissertationem

DE CORONA & PARHELIIS.

TRACTATUM { DE MOTU.
DE VI CENTRIFUGA.

Descriptionem

AUTOMATI PLANETARII.

LUGDUNI BATAVORUM,

Apud CORNELIUM BOUTESTEYN, 1703.

Титульный лист посмертных сочинений Х. Гюйгенса.

19 РУБ.