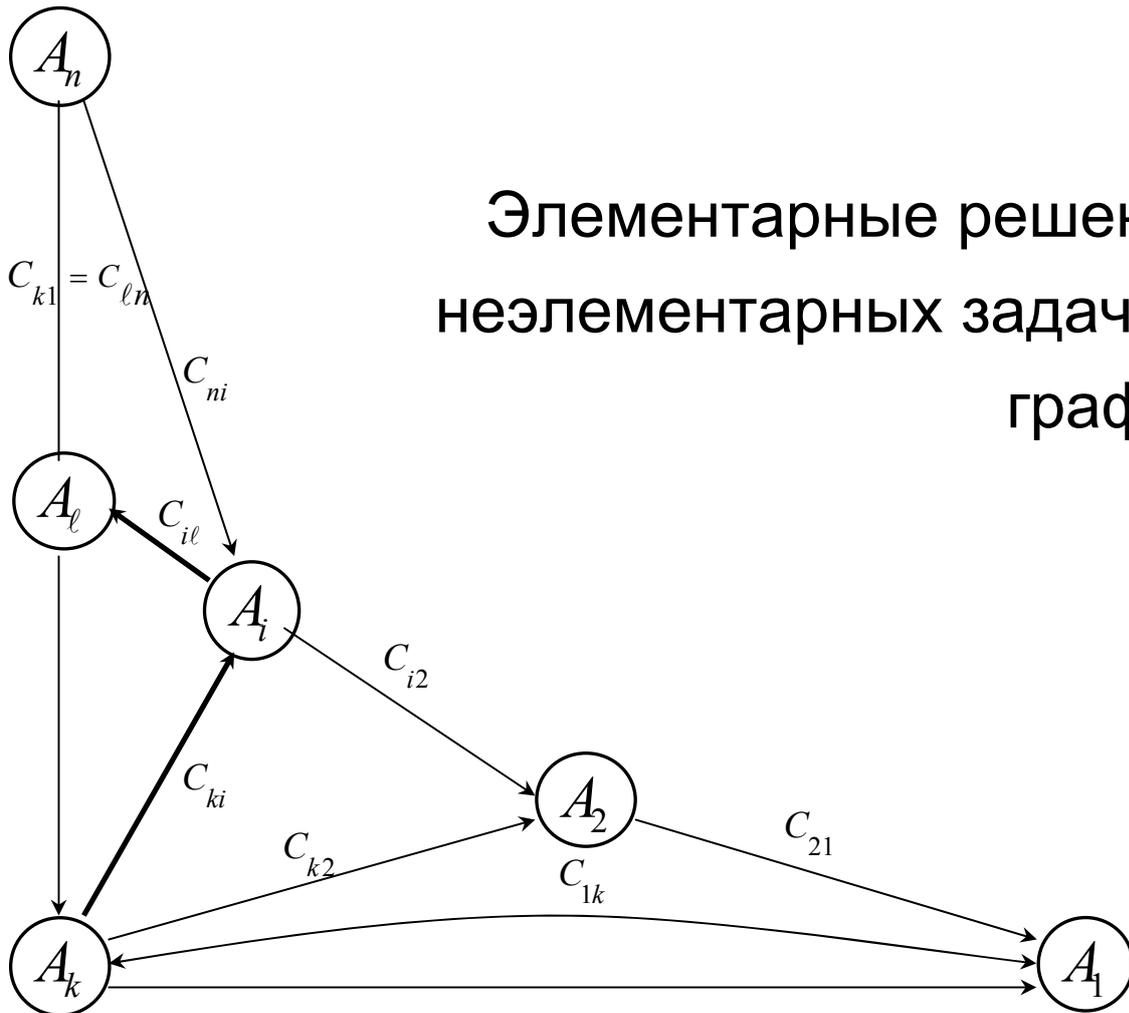


Е.А. Берзин

Элементарные решения
неэлементарных задач на
графах



Тверь 2005

Федеральное агентство по образованию
Тверской государственный технический университет

Е.А. Берзин

**ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ РЕШЕНИЯ
НЕЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЗАДАЧ НА ГРАФАХ**

Учебное пособие

Тверь 2005

УДК 519.8
ББК

Берзин Е.А. Элементарные решения неэлементарных задач на графах / Под ред. А.Н. Кудинова. Тверь: ТГТУ, 2005. 136 с.

Представленные в пособии методы и алгоритмы позволяют эффективно решать ряд оптимизационных задач на графах, имеющих прикладную направленность в экономике и технике. К таким задачам относятся: задача о кратчайшем пути; задача коммивояжера и ее обобщение; задача о пропускных способностях сетей; об оптимальном размещении баз, обслуживающих пунктов.

Базовым методом, положенным в основу остальных методов, является эстафетный метод построения кратчайшего маршрута на графе. Он дает точное решение и требует минимального объема вычислений (полином 2-й степени). Метод расширения цикла обеспечивает эффективное решение классической задачи коммивояжера с заданной точностью. Модификация метода позволяет решить задачу коммивояжера и при неполной ($\varphi < 1$) матрице смежности.

Обобщенная задача коммивояжера, как частный случай, включает в себя классическую задачу. Методы поиска экстремальных точек на графе также связаны с решением ряда задач, имеющих важное практическое значение (размещение рембаз, автозаправочных станций, пожарных депо и т.д.).

Разработанные методы и алгоритмы являются новыми и позволяют решать задачи больших размеров. Для их использования не требуется специальной математической подготовки, что делает их удобными для студентов при освоении специальных дисциплин в технических вузах, а также для научных работников при решении сложных оптимизационных задач на графах элементарными методами. Предназначено для использования в учебном процессе по ряду учебных дисциплин кафедр «Информационные системы», «Автомобильный транспорт» и «Электроснабжение и электротехника».

Рецензенты: заведующий кафедрой математического моделирования, Заслуженный деятель науки РФ, доктор физико-математических наук, профессор А.Н. Кудинов; заведующий кафедрой вычислительной техники и математического моделирования агросистем, доктор технических наук, профессор В.Р. Гриднев.

ISBN 5-7995-0293-0

© Тверской государственный
технический университет, 2005

ПРЕДИСЛОВИЕ

Разработанные в книге методы и алгоритмы, как правило, не имеют строгих формальных обоснований, а базируются на неформальном подходе, в рамках которого автор, учитывая конкретную физическую интерпретацию задачи, предлагает нестандартные решения задач, успешно конкурирующие с известными методами. К таким методам с полным правом может быть отнесён, например, эстафетный метод решения задачи о кратчайшем пути на графе. Этот метод является довольно редким примером того, как эвристический подход приводит к точному решению сложной задачи.

В сочетании с методом расширения цикла эстафетный метод обеспечивает достаточно эффективное решение широко известной задачи коммивояжера, исследования в области которой продолжаются и в настоящее время.

Значительный практический интерес представляют собой сформулированные в работе обобщённая задача коммивояжера и методы её решения, задача о пропускных способностях сетей, покрытии графа, имеющие важную практическую направленность в технических и экономических областях.

Другой особенностью работы является то, что автор не только представляет читателю новые результаты, полученные элементарными методами, но и делится сопутствующими рассуждениями и логическими путями, приведшими к тем или иным решениям.

В заключении автором формулируется ещё одна постановка задачи коммивояжера, подход к решению которой пока остаётся неизвестным.

Рассмотренный в работе круг вопросов будет интересен для лиц, которые, не имея специальной математической подготовки, стремятся найти приемлемые решения различного рода практических задач исходя из общих принципов системного анализа в сочетании с математическими методами. Работа является хорошим учебным пособием для студентов технических вузов, аспирантов, научных работников, связанных с решением сложных оптимизационных задач на графах и сетях путем привлечения для их решения неформальных подходов и методов.

А.Н. Кудинов

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$G = (A, M)$ – граф с $n = |A|$ вершинами и $m = |M|$ дугами;

$A = \{A_j\}_n$ – множество n вершин графа G ;

$M = \{(i, j)\}_m$ – множество дуг графа G ;

(i, j) – дуга с началом в вершине A_i и концом в вершине A_j ;

c_{ij} – длина дуги (в соответствующих единицах);

$\varphi = m / n(n - 1)$ – коэффициент полноты матрицы c ;

$\mu_{k,l} = \langle k, \dots, j, \dots, l \rangle$ – путь (маршрут), проходящий через вершины с

указанными номерами;

$\mu_{k,l}^0$ – кратчайший путь от вершины A_k до вершины A_l ;

$L_{k,l} = L(\mu_{k,l})$ – длина пути от вершины A_k до вершины A_l ;

$\mathcal{E}(\mu_{kj})$ – величина энергозатрат при движении по маршруту μ_{kj} ;

\subset – знак включения;

\in – знак принадлежности;

\Rightarrow – знак следования;

\exists – квантор существования («существует»);

\forall – квантор всеобщности («каждый», «всякий»);

\succ – знак предпочтения (доминирования).

*Здесь нужно, чтоб душа была тверда,
Здесь страх не должен подавать совета,
Здесь никогда не может интуиция одна
Дать ключ к раскрытию научного секрета...*

А. Данте

ВВЕДЕНИЕ

Появление термина «*граф*» как общепринятого понятия в математике связывают с появлением монографии Д. Кёнига¹, где графы рассматриваются в абстрактной форме как некоторые математические объекты. Однако о появлении *теории графов* стало возможным говорить только с появлением достаточно общих методов, изложенных в фундаментальной работе Пойа². Одним из важных и общих методов в теории графов является геометрическая теория *транспортных сетей*, созданная в 1956 – 1957 гг. Фордом, Фалкерсоном и Гейлом. Эта теория позволяет решать не только транспортные, но и множество других задач из области электрических сетей, химии, социологии и других предметных областей.

Отличительной особенностью задач теории графов, как и любых комбинаторных задач, является, как правило, невозможность применения для их решения хорошо разработанного аппарата классического анализа, основанного на исчислении бесконечно малых величин. Это требует неформального подхода при разработке методов решения подобных задач, что часто ставит под угрозу обеспечение гарантий точности получаемых решений.

Разработка достаточно эффективных методов построения кратчайшего пути на графе; решение классической и обобщенной задач коммивояжера при большом числе вершин графа ($n \geq 1000$); поиск маршрута с максимальной пропускной способностью и оценка пропускной способности сети; поиск специальных точек на графе составляют содержание и цель работы.

Во разделе 2 (в разделе 1 содержится необходимый минимум сведений из теории графов) приведен эффективный алгоритм построения кратчайших маршрутов на графе (**эстафетный метод**). Оценка сверху для

¹ König D. Theorie der Endlichen und Unendlichen Graphen. Leipzig, 1936.

² Polya G. Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen // Graphen und chemische Verbindungen. Acta Math. 68 (1937). P. 145.

требуемого числа операций ограничена полиномом третьей степени, при этом решение – точное.

Без существенных изменений эстафетный метод может быть применен и для поиска наиболее длинного (критического) маршрута, что представляет интерес при сетевом планировании.

В разделе 3 предложен **метод расширения цикла**, позволяющий получить решение известной (классической) задачи коммивояжера, получены оценки точности и объёма вычислений. Модификация метода расширения цикла в сочетании с эстафетным методом позволили найти эффективное решение задачи коммивояжера для случая *неполной* матрицы расстояний, описывающей граф дорожной сети. Приводимые оценки подтверждают эффективность модифицированного метода расширения цикла.

При обсуждении материала было высказано важное для практики требование: коммивояжер обязан в каждый из посещаемых пунктов *доставить определённый груз*. Такое обобщение классической задачи коммивояжера потребовало выполнения раздела 4, где поставлена и решена **обобщенная задача коммивояжера**, в которой минимизируется не длина цикла, а требуемые при этом *энергозатраты*. Классическая задача коммивояжера рассматривается как частный случай обобщенной задачи, в которой вес перевозимых грузов равен нулю.

В разделе 5 рассмотрен иной подход к решению задач коммивояжера. В его основе лежит **последовательное наращивание цикла** путём последовательного выбора и подключения участков кратчайших маршрутов с последующим замыканием цикла.

Раздел 6 посвящен новому решению задачи о **пропускной способности сети**.

Раздел 7 содержит некоторые теоретические обобщения и метод определения **особых точек на графе**, удовлетворяющих заданным требованиям, возникающим при решении ряда практических задач.

В заключении обобщены основные результаты, полученные в работе, и даны возможные направления дальнейших исследований в указанной области.

1. НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

1.1. Основные понятия и определения

Теория графов, как и любая математическая теория, использует некоторую символику и понятия, которые применяются при проведении исследований. Центральным понятием теории графов является понятие **графа**, как некоторой схемы, состоящей из множества $A = \{A_j\}_n$ вершин (узлов), соединённых между собой множеством $M = \{(i, j)\}_m$ некоторых линий (дуг (i, j)) [1; 2]. Граф $G = (A, M)$ – это схематическое изображение некоторого физического объекта (участка дорожной сети, электросхемы и т.п.). С формальных позиций, граф – это отображение множества A «в себя» (т.е. в множество A), осуществляемое по некоторому закону Γ (с помощью множества дуг M). Граф дорожной сети или, например, сети передачи данных представлен на рис. 1. В первом случае под вершиной A_i имеется в виду некий населенный пункт (город, деревня под номером i), во втором – некий узел связи (*узел коммутации* – УК, *узел-источник* – УИ A_i , *узел-приёмник* – УП A_j).

Две вершины, связанные одной дугой (i, j) , называются смежными. При этом начало дуги связано с источником A_i , а её конец – с приёмником A_j . В зависимости от физической природы графа каждой его дуге приписывается некоторый вес c_{ij} : в первом случае это длина дуги (i, j) , связывающей вершину A_i с A_j ; во втором – длительность передачи сигнала от узла-источника A_i до узла-приёмника A_j . Направление, по которому возможно движение (передача сигнала) по данной дуге, указывается стрелкой (см. рис. 1).

Граф с направленными дугами называется *ориентированным*. В неориентированном графе стрелки не указываются (ребро – пара дуг $c_{ij} = c_{ji}$).

Для проведения формальных исследований удобна матричная форма представления графа с помощью матрицы *смежности*. Её смысл ясен из матрицы $\mathbf{c} = \|c_{ij}\|$, представляющей тот же граф в табличном виде (табл. 1). Каждая вершина графа представляется в виде двух составляющих: узла-источника A_i и узла-приёмника A_j , при этом узлу-источнику A_i соответствует i -я строка матрицы \mathbf{c} , узлу-приёмнику A_j – j -й столбец этой же матрицы (табл. 1).

Согласно [1], **путём** (маршрутом) на графе $G = (A, M)$ будем называть такую последовательность соединённых дуг (i, j) , что конец каждой

предыдущей дуги совпадает с началом следующей.

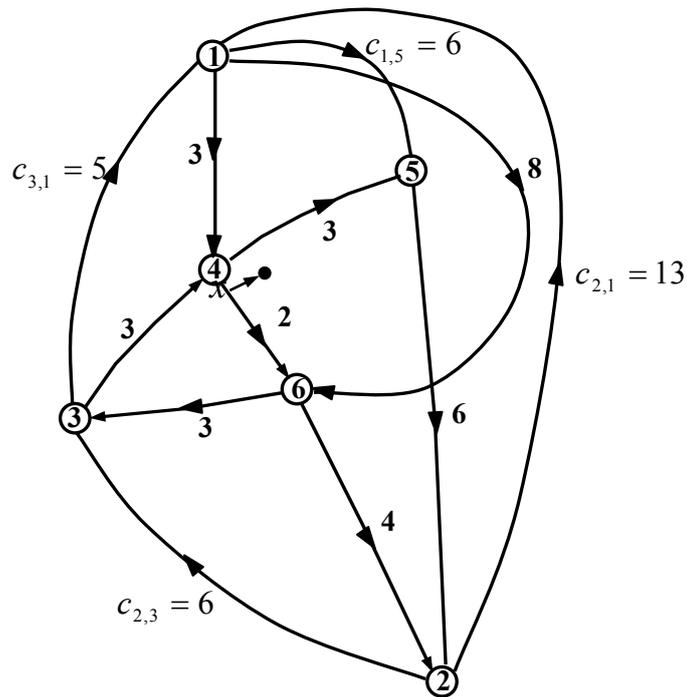


Рис. 1. Граф транспортной сети

Таблица 1

| | $j = 1$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---------|---------|---|---|---|---|---|
| $k = 1$ | | | | 3 | 6 | 8 |
| 2 | 13 | | 6 | | | |
| 3 | 5 | | | 3 | | |
| 4 | | | | | 3 | 2 |
| 5 | | 6 | | | | |
| 6 | | 4 | 3 | | | |

Путь от вершины A_k к вершине A_l μ_{kl} – это упорядоченная последовательность (кортеж) дуг (или номеров вершин) с началом пути в узле-источнике A_k и концом пути в узле-приёмнике A_l (k, l – номера конечных (граничных) вершин (пунктов) маршрута μ_{kl}):

$$\mu_{kl} = \langle (k, i), \dots, (j, l) \rangle, \text{ или } \mu_{kl} = \langle k, i, \dots, j, l \rangle, \quad (1.1)$$

где (k, i) , (j, l) – начальная и конечная дуги маршрута μ_{kl} (граничные, концевые дуги).

Путь называется **элементарным**, если никакая вершина в нём не встречается более одного раза.

Путь называется **простым**, если никакая дуга не входит в него дважды. В противном случае путь является **составным**.

Контур – это конечный путь, у которого начальная вершина совпадает с конечной. Контур, как и путь, может быть элементарным, простым и составным.

Если на месте некоторого элемента c_{ij} в матрице \mathbf{c} нет никакой записи, то считается, что от узла-источника A_i до узла-приемника A_j нет прямой связи ($c_{ij} = \infty$). Указанные элементы в расчётах не используются. Никаких записей не делается также на месте элементов c_{ij} при $i = j$, однако $c_{ii} = 0$.

Цепь от пути отличается только тем, что некоторые дуги в ней могут иметь различную направленность. Тем же отличается и **цикл** от **контура**, который можно рассматривать как частный случай цикла, где вместо понятия «дуга» фигурирует понятие «ребро» [1].

Длина пути равна сумме длин дуг его составляющих и вычисляется по формуле

$$L_{k,l} = L(\mu_{kl}) = \sum_{(i,j) \in \mu_{kl}} c_{ij}, \quad (1.2)$$

где запись $(i, j) \in \mu_{kl}$ означает, что суммируются длины дуг, образующих данный путь μ_{kl} . Например, из табл. 1 для $\mu_{1,3}^0 = \langle 1, 4, 6, 3 \rangle$ имеем

$$L_{1,3}^0 = L(\mu_{1,3}^0) = c_{1,4} + c_{4,6} + c_{6,3} = 3 + 2 + 3 = 8,$$

где $\mu_{1,3}^0$ – кратчайший маршрут от пункта A_1 к A_3 .

Если между любыми двумя вершинами существует хотя бы один

путь, то граф (A, M) **сильно связан**. Минимальное число дуг, требуемое для обеспечения сильной связности графа, равно n [3].

Граф (A, M) называется **полным**, если любые две вершины соединены хотя бы в одном направлении [1]:

$$(i, j) \notin M \Rightarrow (j, i) \in M, \quad (1.3)$$

т.е. если дуги (i, j) не существует, то имеется дуга (j, i) .

Примечание. Понятие «полный граф», однако, не будем отождествлять с равенством единице **коэффициента полноты** φ матрицы \mathbf{c} , который вводится в [3] как доля числа дуг графа m от их максимально возможного количества:

$$\varphi = m / n(n - 1), \quad \varphi = 12 / 6 \cdot 5 = 0,4 \text{ (табл. 1).}$$

Согласно (1.3) граф на рис. 1 не является полным, а коэффициент полноты $\varphi=0,4$ (<1), однако данный граф сильно связан.

Введённый минимум необходимых понятий и обозначений позволяет записать формальную постановку задач, разработка достаточно эффективных алгоритмов решения которых является основной целью данной работы.

2. ЗАДАЧА О КРАТЧАЙШЕМ ПУТИ НА ГРАФЕ

2.1. Постановка задачи

На графе (A, M) требуется найти такую последовательность номеров вершин, соединяющую вершины A_k и A_l (путь μ_{kl} (1.1)), при которой длина пути (1.2) будет минимальной (μ_{kl}^0).

В 1956 г. Л. Форд [4] предложил алгоритм решения задачи поиска кратчайшего маршрута на графе. Поскольку запись исходной информации в форме графа (рис. 1) мало приемлема для использования ЭВМ, то в [4] отмечается возможность решения задач построения кратчайшего маршрута большого размера «вручную». Однако возможности человека также существенно ограничены. В [4] оценка по требуемым вычислительным затратам не приводится.

В [5] рассматривается матричный подход к решению задачи поиска кратчайшего маршрута. При этом в основу решения положено использование двойственного симплексного метода решения задачи линейного программирования (ЛП), поэтому естественным является вопрос, задаваемый автором в [1; с. 81]: «Не будет ли это стрельбой из пушки по воробьям?».

Известны и другие подходы к решению задачи поиска кратчайшего маршрута, однако и там остаются нерешёнными некоторые вопросы, особенно в задачах больших размеров [6].

Краткий обзор проблемы, связанной с поиском кратчайшего маршрута, позволяет сделать вывод о том, что она ещё не решена в достаточно полной мере, и необходим дальнейший анализ, позволяющий расширить возможности по решению задач больших размеров. Формальную постановку будет удобно записать в комбинаторном виде как задачу минимизации целевой функции (2.1) на множестве **нескалярных** переменных $\mu_{k,l}$:

$$L_{k,l} = L(\mu_{k,l}) = \sum_{(i,j) \in \mu_{k,l}} c_{ij} \rightarrow \min_{\mu_{k,l}}, \quad (2.1)$$

$$\mu_{k,l} \in \left\{ \mu_{kl}^r, r=1; n=2 \right\},$$

где r – возможное количество номеров промежуточных вершин в кортеже $\mu_{k,l}$ ($r=0, n-2$).

Упрощение записи формальной постановки задачи по сравнению с её записью в форме задачи математического программирования [5] получено за счёт перехода от *скалярных* переменных к более сложным *нескалярным* переменным $\mu_{k,l}^r$, что позволяет предложить эффективный метод решения поставленной задачи.

2.2. Эстафетный метод построения кратчайшего пути на графе

В основу эстафетного метода [3] положена следующая физическая интерпретация поиска кратчайшего маршрута от вершины A_k к A_l .

Из узла-источника A_k (рис. 1; табл. 1) по всем возможным направлениям одновременно в момент $T_k^c = 0$ стартуют гонцы,двигающиеся с **одинаковой единичной** скоростью. Первым к некоторой вершине прибудет тот гонец из данной группы (**лидер**), у которого расстояние до вершины будет меньше, чем у других. Момент прибытия при этом будет численно равен длине пути, т.к. скорость равна единице.

Применительно к графу (табл. 1), при старте гонцов из УИ A_1 первым придет (на первой итерации $t=1$) гонец в пункт $A_{j_t} = A_4$, пройдя при этом путь длиной $\min_j(c_{1j}) = \min(3;6;8) = 3$ к моменту $T_{j_t}^c = T_4^c = 3$.

Если при этом номер достигнутой вершины совпадает с нужным (т.е. $l=4$), то кратчайший путь найден на первой же итерации. При этом гонец пройдет по маршруту $\mu_{1,4} = \langle 1;4 \rangle$, а его длина $L_{1,4}$ будет равна $L_{1,4} = L(\mu_{1,4}) = c_{1,4} = 3$. Столбец $j=4$ из табл. 1 удаляется.

Однако если найденный кратчайший маршрут не является искомым ($j_t = 4 \neq l$), то к остальным гонцам, стартовавшим из A_k , добавляется новая партия гонцов, получившая *эстафету* в момент $T_4 = 3$ и стартующая из пункта A_4 ко всем ещё не «оповещённым» пунктам (рис. 1; A_6, A_5). Момент старта $T_4^c = 3$ удобно записывать справа от строки $i=4$ (табл. 1).

Из новой группы выделяется *лидер* – он первым из этой партии придет к своему пункту (A_6). Так как этот лидер стартовал через $T_4^c = 3$ ед. времени **после старта первой группы**, то при единой системе отсчёта времени он придет в A_6 в момент времени $T_6 = T_4 + c_{4,6} = 3 + 2 = 5$ ед.

Новый лидер в первой стартовавшей группе придет в A_5 позднее – в момент $T_5^c = c_{1,5} = 6$ ед. (табл. 1). Следовательно, очередной кратчайший маршрут будет иметь длину $L_{1,6} = 5$ ед., при этом его концевая дуга (4;6) закончится в вершине A_6 (табл. 2; $t=2$). Чтобы найти новый кратчайший маршрут, необходимо его концевую дугу (4;6) **достроить слева** кратчайшим маршрутом, который к данной итерации уже был найден ($\mu_{1,4}^0 = \langle 1;4 \rangle$). Очередной кратчайший маршрут запишется (табл. 3):

$$\mu_{1,6}^0 = \mu_{1,4}^0 \cup \mu_{4,6}^0 = \langle 1;4 \rangle \cup \langle 4;6 \rangle = \langle 1;4;6 \rangle. \quad (2.2)$$

Если граничная вершина полученного кратчайшего маршрута (A_6) совпадает с искомой (т.е. $j_2 = 6 = l$), то процесс оканчивается. При $6 \neq l$ столбец $j=6$ из табл. 1 удаляется, и цикл повторяется до выполнения условия $j_t = l$, где j_t – номер граничной вершины кратчайшего маршрута, который будет найден на текущей итерации t .

Таблица 2

| T_i^c | t | | |
|---------|------------------|------------------|------------------|
| | 1 | 2 | 3 |
| 0 | 3 _{1,4} | 6 _{1,5} | 6 _{1,5} |
| | | | |
| | | | |
| 3 | | 5 _{4,6} | 6 _{4,5} |
| | | | |
| 5 | | | 8 _{6,3} |
| N_t^c | 2 | 3 | 3 |
| N_t^+ | 0 | 1 | 2 |

Таблица 3

| t | $\mu_{k,l}^0$ | $L_{k,l}^0$ |
|-----|---------------|-------------|
| 1 | 1,4 | 3 |
| 2 | 1,4,6 | 5 |
| 3 | 1,5 | 6 |
| 3 | 1,4,5 | 6 |
| 4 | 1,4,6,3 | 8 |
| 5 | 1,4,6,2 | 9 |
| 6 | 1,4,6,3,1 | 13 |

Определяемое таким путём множество кратчайших маршрутов получается упорядоченным по их длине, поэтому процесс поиска кратчайших маршрутов к заданной вершине A_l не требует построения всего множества кратчайших маршрутов из вершины A_k , но может быть остановлен в момент появления концевой дуги с вершиной A_l .

Более детально порядок построения кратчайшего маршрута эстафетным методом и его вычислительную схему рассмотрим на примере поиска кратчайшего маршрута $\mu_{1,3}^0$ ($k=1, l=3$) на графе дорожной сети, заданной матрицей расстояний \mathbf{c} (табл. 1).

Из вершины (пункта) A_k в момент старта $T_k^c = 0$ ($k=1$ – номер пункта старта) начинает движение группа гонцов с эстафетами, двигающихся с единичной скоростью ко всем смежным с A_1 вершинам (табл. 1; A_4, A_5, A_6). Гонца, который первым придёт к своему объекту, будем именовать лидером и обозначать $L_{i,j}$ (первый индекс – номер пункта старта A_i , второй – финиша). Для $k=1$ лидер $L_{1,4}$ финиширует в пункте A_4 в момент времени, численно равный минимальному из элементов строки $k=1$:

$$L_{1,4} = \min_j c_{ij} = c_{kj_1} = \min\{3,6,8\} = 3 = c_{1,4} \Rightarrow j_1 = 4, T_1^\phi = 3. \quad (2.3)$$

Момент финиша T_1^ϕ лидера $L_{1,4}$ в A_4 является сигналом для старта очередной группы гонцов из пункта A_4 ($T_4^c = T_1^\phi$), при этом вся группа и её лидер стартуют с задержкой относительно первой группы, равной времени финиша $L_{1,4}$, поэтому момент её старта T_4^c численно равен длине пути $L_{1,4}$, т.е. длине найденного кратчайшего маршрута $L_{1,4}^0$ (табл. 3).

Время задержки, как и момент старта $T_4^c = 3$ группы, стартующей из пункта A_4 , удобно записывать рядом с табл. 1 справа на уровне соответствующей строки ($i = 4$). Столбец $j = 4$ из дальнейших вычислений выбывает, т.к. кратчайший маршрут к A_4 уже найден (табл. 1; столбцы 4 – 6). Итоговый результат записан в табл. 3.

Далее цикл повторяется: в обеих движущихся группах выделяются лидеры $L_{1,5}$ и $L_{4,6}$. С помощью табл. 1 и 2 вычисляются моменты финиша лидеров в единой системе отсчёта времени (от $T_1^c = 0$) по формуле

$$T_i^\phi = T_i^c + T_{in}^{0\phi}, \quad i \in I^t, \quad (2.4)$$

где T_i^c – время старта группы из пункта A_i (т.е. время её задержки относительно первой стартовавшей группы $T_1^c = 0$); $T_{in}^{0\phi}$ – время движения лидера L_{i,j_t} данной группы гонцов на данном шаге (t) процесса; I^t – множество групп гонцов, находящихся в движении на t -м шаге процесса.

Моменты старта групп записаны правее табл. 1, а время движения каждого лидера численно равно длине соответствующей ему концевой дуги:

$$i \in I^2 = \{0;4\}: \begin{cases} i = 0 : 0 + c_{1,5} = 0 + 6 = 6, & (1;5) \text{ для } L_{1,5}, \\ i = 4 : 3 + c_{4,6} = 3 + 2 = 5, & (4;6) \text{ для } L_{4,6}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Из (2.5) видно, что лидер $L_{4,6}$ определяет очередной кратчайший маршрут.

Необходимые промежуточные вычисления путём элементарных расчётов [см. формулу (2.5)] выполняются по данным табл. 1. с использованием столбца T_i^c . Эти результаты записываются в табл. 2, $t = 2$, откуда определяется **главный лидер** $L_{4,6}$ и концевая дуга (4;6). По концевой дуге [см. формулу (2.2)] находится очередной кратчайший маршрут

$$\mu_{1,6}^0 = \langle 1,4,6 \rangle \text{ и его длина } L_{1,6}^0 = T_{4,6}^\phi = 5.$$

Итоговые результаты записаны в табл. 3, $t = 2$.

Так как концевая вершина $j=6 \neq l=3$, то процесс продолжается.

Шаг $t = 3$:

- столбец $j = 6$ удаляется из памяти ЭВМ (табл. 1; столбцы 4 –6);
- момент старта из A_6 $T_6^c = L_{1,6}^0 = 5$ записывается правее строки $i = 6$;
- согласно (2.4), (2.5) вычисляются элементы для $t = 3$ (табл. 2).

Из полученного столбца (табл. 2; $t = 3$) следует, что очередные два кратчайших маршрута имеют длины $L_{1,5}^0 = 6$ и $L_{4,5}^0 = 6$; концевые дуги: $(1;5) \Rightarrow \mu_{1,5}^0 = \langle 1;5 \rangle$; $(4;5) \Rightarrow \mu_{4,5}^0 = \langle 1,4,5 \rangle$ (табл. 3). Так как пункт A_3 не является концевым у найденного кратчайшего маршрута ($l = 3 \neq 5$), то процесс продолжается (столбец $j = 5$ из табл. 1 удаляется).

Шаг $t = 4$.

Далее, для большей наглядности, процесс продолжен в табл. 4 и 5, из которых убраны ненужные предыдущие записи:

- момент старта $T_5^c = L_{1,5}^0 = 6$ записывается правее строки $i = 5$ на одном уровне с нею;
- согласно (2.3), (2.4) вычисляются моменты финиша лидеров всех групп $i \in I^t$ (табл. 5, $t = 4$; в группах $\{i\} = \{1;4\} \subset I^4$ гонцов уже не осталось, а в группах $\{2;3\}$ они ещё не стартовали);
- из полученного столбца следует, что лидер $L_{6,3}$, определяющий очередной кратчайший маршрут, финиширует в **заданной** вершине A_3 ($t_4 = 3 = l = 3$).

Концевая дуга (6;3) позволяет построить кратчайший маршрут

$$\mu_{1,3}^0 = \langle 1,4,6 \rangle \cup (6;3) = \langle 1,4,6,3 \rangle \text{ при этом } L_{1,3}^0 = 8,$$

что записано в табл. 3. Процесс прекращается.

Примечания:

1. В табл. 5 выполнен шаг $t = 5$, завершающий построение всего множества кратчайших маршрутов из УИ A_1 . Это множество представлено первой строкой табл. 9. Другие строки табл. 9 содержат аналогичные результаты, полученные при других УИ A_i (промежуточные вычисления опущены).

В диагональных клетках табл. 9 можно было записать $L_{k,k}^0 = L_k^0 = 0$, $\mu_{k,k}^0 = \mu_k^0 = \langle k, k \rangle$. Однако вместо этого тривиального результата в них записаны *запасные* (кратчайшие из оставшихся) *кольцевые* маршруты. Такие кратчайшие маршруты получаются, если перед началом расчётов столбец $j = k$ не удалять из табл. 1.

2. В правом столбце табл. 9 приведены средние значения длины кратчайшего маршрута как интегральная характеристика k -го узла-источника A_k :

$$L_k^l = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n L_{k,l}^0, \quad k=1, n, \quad L_{k,k}^0 = 0.$$

Исходная информация (после трех итераций) представлена в табл. 6, вспомогательные записи при расчетах и результаты расчетов – в табл. 7 и 8 соответственно.

Усреднение длины кратчайших маршрутов по всему их множеству

$$L^\varphi = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n L_k^0$$

может рассматриваться как некая обобщённая характеристика графа с данной топологической структурой и полнотой φ , что важно при проектировании сетей передачи данных.

Таблица 4

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| k=1 | | | | | | |
| 2 | 1 | | 6 | | | |
| 3 | 5 | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | 6 | | | | |
| 6 | | 4 | 3 | | | |

Таблица 5

| T_i^c | t | | | | | |
|---------|-----|---|---|-------------------|-------------------|-------------------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 0 | | | | – | – | – |
| 9 | | | | | | 22 _{2,3} |
| 8 | | | | | | 13 _{3,1} |
| 3 | | | | – | – | – |
| 6 | | | | 12 _{5,2} | 12 _{5,2} | – |
| 5 | | | | 8 _{6,3} | 9 _{6,2} | – |
| N_t^c | 2 | 3 | 3 | 2 | 1 | 11 |
| N_t^+ | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 7 |

Таблица 6 ($\varphi=0,4$)

| | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| k=1 | | | | 3 | 6 | 8 |
| 2 | 1 | | 6 | | | |
| 3 | 5 | | | 3 | | |
| 4 | | | | | 3 | 2 |
| 5 | | 6 | | | | |
| 6 | | 4 | 3 | | | |

Таблица 7

| | | | | | |
|---------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|--------------------------|
| T_i^c | t | | | | |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0 | 3 _{1,4} | 6 _{1,5} | 6 _{1,5} | – | – |
| 9 | | | | | |
| 8 | | 5 _{4,6} | 6 _{4,5} | | – |
| 3 | | | | – | – |
| 6 | | | | | 12 _{5,2} |
| 5 | | | 8 _{6,3} | 8 _{6,3} | 9 _{6,2} |

Таблица 8

| | | |
|-----|-----------------|---------------|
| t | μ_{k,j_t}^0 | L_{k,j_t}^0 |
| 1 | 1,4 | 3 |
| 2 | 1,4,6 | 5 |
| 3 | 1,5 | 6 |
| 3 | 1,4,5 | 6 |
| 4 | 1,4,6,3 | 8 |
| 5 | 1,4,6,2 | 9 |

$N^c = 11, N^+ = 7$

Таблица 9. Совмещенная матрица $\left\| \begin{matrix} \mu_{k,l}^0 \\ L_{k,l}^0 \end{matrix} \right\|, L^\varphi = 7,7, \varphi = 0,4$

| | | | | | | | | |
|-----------------------|---|------------------------|------------------------|---------------------|----------------------|------------------------|------------------------|---------|
| | | $l, j, \text{УП } A_j$ | | | | | | L_k^0 |
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
| УИ A_i i, k | 1 | <u>1,4,6,3,1</u> 13 | <u>1,4,6,2</u> 9 | <u>1,4,6,3</u> 8 | <u>1,4</u> 3 | <u>1,5;1,4,5</u> 6 | <u>1,4,6</u> 5 | 5,2 |
| | 2 | <u>2,3,1</u> 11 | <u>2,3,4,6,2</u> 15 | <u>2,3</u> 6 | <u>2,3,4</u> 9 | <u>2,3,4,5</u> 12 | <u>2,3,4,6</u> 11 | 8,2 |
| | 3 | <u>3,1</u> 5 | <u>3,4,6,2</u> 9 | <u>3,4,6,3</u> 8 | <u>3,4</u> 3 | <u>3,4,5</u> 6 | <u>3,4,6</u> 5 | 4,7 |
| | 4 | <u>4,6,3,1</u> 10 | <u>4,6,2</u> 6 | <u>4,6,3</u> 5 | <u>4,5,4</u> 8 | <u>4,5</u> 3 | <u>4,6</u> 2 | 4,3 |
| | 5 | <u>5,2,3,1</u> 17 | <u>5,2</u> 6 | <u>5,2,3</u> 12 | <u>5,2,3,4</u> 15 | <u>5,2,3,4,5</u> 12 | <u>5,2,3,4,6</u> 17 | 11,2 |
| | 6 | <u>6,3,1</u> 8 | <u>6,2</u> 4 | <u>6,3</u> 3 | <u>6,3,4</u> 6 | <u>6,3,4,5</u> 9 | <u>6,3,4,6</u> 8 | 5,0 |

Подробнее о практических аспектах использования результатов, получаемых на основе решения задачи о кратчайшем пути, можно ознакомиться по другим источникам, например [3 – 8].

2.3. Алгоритм эстафетного метода (ЭМ)

Рассмотренная схема расчётов может быть представлена в форме алгоритма, для описания которого введем дополнительно некоторые обозначения:

G^t – множество номеров вершин A_j , к которым при выполнении t -го шага (итерации) процесса ещё не найдены кратчайшие маршруты (например, $G^1 = \{\forall j \neq k\}$);

G_i^t – множество номеров вершин A_j , к которым при выполнении t -го шага от вершины A_i **существует конечная дуга** ($c_{ij} > 0$) и, следовательно, к этим вершинам ещё возможно построение маршрута

$$G_i^t = \{j \mid c_{ij} > 0, j \in G^t\}, i \in I^t,$$

где I^t – множество номеров вершин A_i (УИ A_i), от которых за все t шагов стартовали группы гонцов (например, $I^1 = \{k\}$);

$\{j_t\}$ – множество номеров конечных вершин A_j , к которым на t -м шаге были найдены кратчайшие маршруты;

Проиллюстрируем динамику работы алгоритма ЭМ при построении кратчайшего маршрута $\mu_{1,3}^0$, блок-схема которого представлена на рис. 2.

Исходной информацией является матрица c (табл. 1) и конечные вершины $(k;l) = (1;3)$ – пункт 1^0 . Для первого шага ($t=1$; пункт 2^0) вычисляются начальные значения текущих величин:

$$3^0 : G^1 = \{2,3,4,5,6\}, G_1^1 = \{j \mid c_{1j} > 0, j \in \{2,3,4,5,6\}\} = \{4,5,6\}, I^1 = \{1\}, T_1^c = 0.$$

Начало отсчёта (время старта каждой группы гонцов) не зависит от номера шага t и при «ручных» расчётах последовательно в ходе процесса записывается справа от табл. 1.

Множество конечных дуг $\{(i, j_t)\}$ лидеров стартовавших групп для шага $t = 1$ ($I^1 = \{k\} = \{1\}$) согласно 4^0 равно:

$$i = 1 : \min_{j \in G_1^1}(c_{1,j}) = \min(c_{1,4}; c_{1,5}; c_{1,6}) = \min(3; 6; 8) = 3 \Rightarrow (i, j_1) = (1; 4).$$

Концевые дуги (i, j_t) и их длины c_{ij_t} запоминаются в памяти ЭВМ (при «ручных» расчётах записываются в табл. 2, $t = 1$).

Поскольку множество конечных дуг лидеров не пусто (5^0 -), то это означает, что к некоторым вершинам могут быть построены маршруты.

Пункт 6⁰ позволяет найти концевые дуги кратчайших маршрутов (таких маршрутов может быть более одного). Чтобы выявить кратчайший маршрут необходимо момент прибытия каждого из множества I^l лидеров привести к **единой (относительно момента старта первой группы $T_k^c = 0$) системе отсчёта времени**, при этом наименьшее время и обозначит собой концевую дугу очередного кратчайшего маршрута (6⁰):

$$\min_{i \in \{1\}} (T_i^1 + c_{i,4}) = 0 + 3 = 3 \Rightarrow \{(1;4)\}, \{j_1\} = \{4\}, \{i_1\} = \{1\}.$$

Поскольку на первом шаге старт произведен только из УИ A_1 , то лидер этой группы и определит первый кратчайший маршрут, самый короткий из всего множества, записанный в строке $t = 1$ (табл. 9). Согласно 7⁰ сам кратчайший маршрут будет получен **путём достраивания его недостающей части слева от концевой дуги (1;4)**:

$$\mu_{1,4}^0 = \langle k, \dots, i_1 \rangle \cup (i_1; j_1) = \langle 1, \dots, 1 \rangle \cup (1;4) = \langle 1;4 \rangle.$$

Длина построенного кратчайшего маршрута $L_{kj_1}^0$ при единичной скорости движения гонцов численно равна моменту прибытия лидера на концевую вершину A_4 кратчайшего маршрута $\mu_{1,4}^0$.

Конечные результаты фиксируются в памяти ЭВМ, а при «ручных» расчётах записываются в табл. 3.

Если номер $l = 3$ искомой вершины содержится среди номеров концевых вершин $\{j_i\}$ найденных кратчайших маршрутов (8⁰⁺), то выводятся и записываются полученные результаты (11⁰), процесс заканчивается. В противном случае (8⁰⁻) производится пересчет текущих величин (9⁰) и делается переход к очередной итерации (10⁰).

Согласно пункту 9⁰ вначале уточняются множество номеров вершин A_j , к которым ещё не построены кратчайшие маршруты, и множество номеров вершин, от которых проведен старт групп:

$$G^2 = \{2,3,4,5,6\} \setminus \{4\} = \{2,3,5,6\}, \quad I^2 = \{1\} \cup \{4\} = \{1,4\}.$$

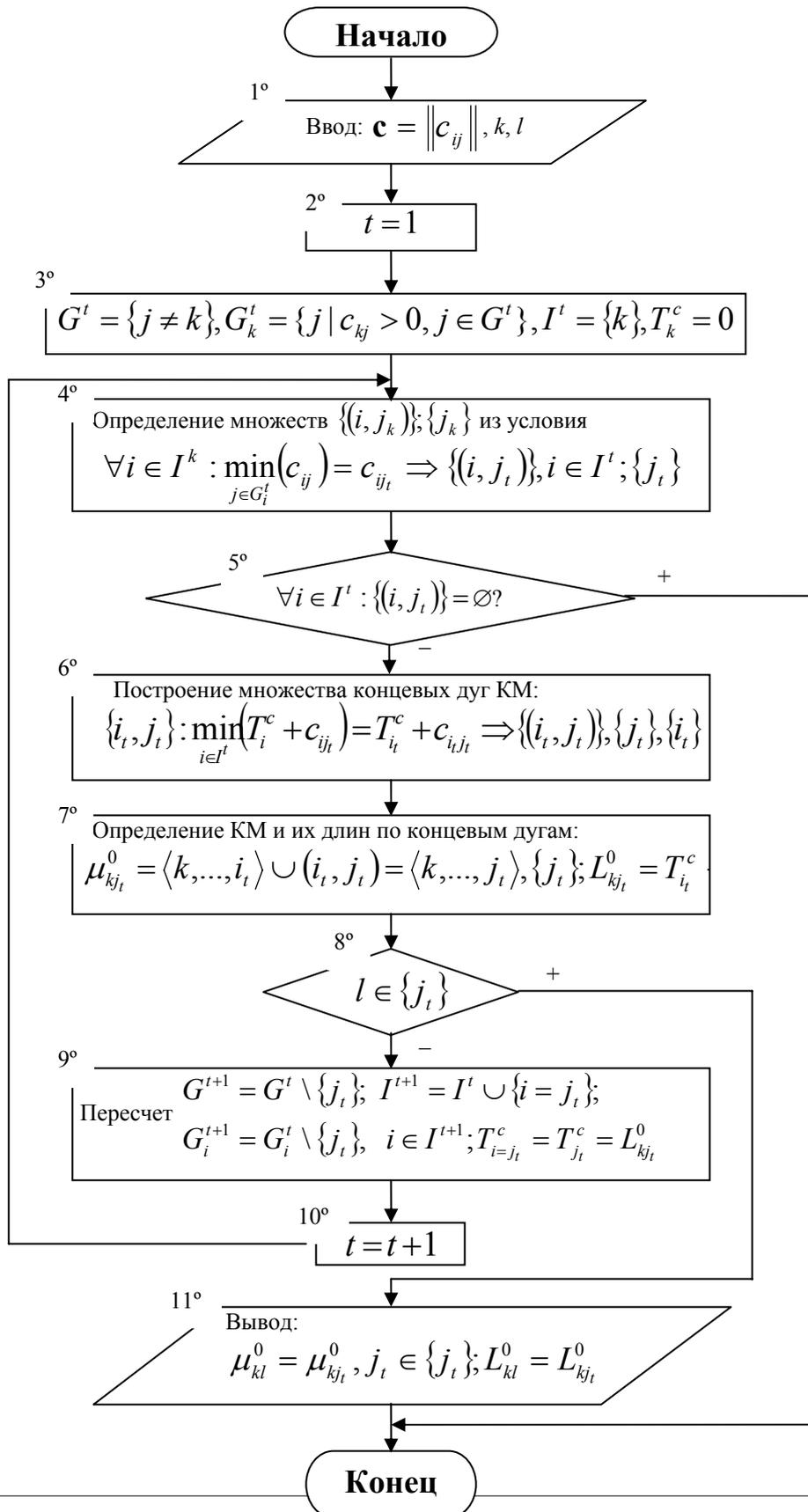


Рис. 2. Блок-схема алгоритма построения кратчайшего маршрута (КМ) эстафетным методом

Уточнение множества G^t равносильно удалению соответствующих столбцов в матрице c при «ручных» расчётах.

Номера конечных вершин A_j , к которым ещё возможно построение маршрута на втором шаге ($t=2$) процесса из пунктов старта A^i $i \in I^2 = \{1;4\}$, найдутся по рекуррентной формуле (пункт 9⁰)

$$I^2 = \begin{cases} i=1: & G_1^2 = G_1^1 \setminus \{j_1\} = \{4;5;6\} \setminus \{4\} = \{5;6\}, \\ i=4: & G_4^2 = G_4^1 \setminus \{j_1\} = \{5;6\} \setminus \{4\} = \{5;6\}. \end{cases}$$

Величины задержек моментов старта гонцов остаются прежними для *всех стартовавших ранее групп* ($i \in I^t$), а для стартовавших вновь (поле t -го шага процесса) задержка численно равна длине кратчайшего маршрута до соответствующего УИ A_i ($i \in \{j_t\}$). Для $t=2$ согласно 9⁰ имеем

$$T_{j_1}^c = T_4^c = L_{1,4}^0 = 3.$$

Далее осуществляется переход к шагу $t=2$ (пункт 10⁰), и весь цикл повторяется уже с двумя стартовавшими группами ($I^2 = \{1;4\}$).

Согласно 4⁰ определяются концевые дуги лидеров $\{(i, j_t)\}$ (табл. 2; $t=2$). Так как найденное множество дуг не пусто (5⁰ –), то определяется (6⁰) концевая дуга очередного кратчайшего маршрута (или множество $\{j_t\}$), строится сам кратчайший маршрут (7⁰) и находится его длина $L_{1,6}^0 = 5$ (табл. 2; $t=2$; 7⁰), полученный результат при «ручных» расчётах заносится в табл. 3, $t=2$.

Поскольку искомый кратчайший маршрут не найден ($l=3 \notin \{6\}$, 8⁰ –), то после пересчёта текущих величин (9⁰) выполняется очередная итерация (10⁰, $t=3$), время задержки новой группы гонцов, стартующей от УИ A_6 $T_6^c = 5$, записано справа от строки $i=6$ в табл. 1.

На итерации $t=3$ согласно 6⁰ множество концевых дуг содержит уже три элемента:

$$\{(i_3, j_3)\} = \{(1;5), (4;5), (6;3)\} \text{ (табл. 2; } t=3).$$

Две дуги соответствуют более коротким маршрутам ($L_{1,5}^0 = 6 < L\langle 1,4,6,3 \rangle = 8$) и ведут к одному УИ A_5 . Значит, к вершине A_5

существуют два равных по длине кратчайших маршрута. Согласно 7^0 это маршруты

$$\mu_{1,5}^0 = \langle 1;5 \rangle \text{ и } \mu_{1,5}^{0'} = \langle 1;4 \rangle \cup (4;5) = \langle 1;4;5 \rangle, \quad L(\mu_{1,5}^0) = L(\mu_{1,5}^{0'}) = 6.$$

Так как $l = 3 \neq 5$, то согласно $8^0 - 10^0$ начинается новый цикл ($t = 4$), в ходе которого и будет построен искомый кратчайший маршрут $\mu_{1,3}^0 = \langle 1,4,6,3 \rangle$ (см. табл. 7; 8).

Циклический алгоритм достаточно прост, что обеспечивает решение задач больших размеров ($n > 1000$) за приемлемое для практических целей время.

2.4. Оценка эффективности алгоритма

Основными показателями метода, характеризующими его возможности для решения задач данного класса, обычно являются точность решения задачи, требуемые при этом объём вычислений и объём оперативной памяти.

Несмотря на эвристическую основу эстафетного метода, анализируя его вычислительную схему, можно убедиться, что на каждом шаге процесса она приводит, по крайней мере, к одному кратчайшему маршруту. Действительно, из табл. 1 видно, что от УИ A_1 никакой другой маршрут не может быть короче, чем $\mu_{1,4}^0 = \langle 1;4 \rangle = 3$.¹

На шаге $t = 2$ оставшиеся гонцы достигнут пунктов A_5 , A_6 соответственно в моменты времени 6 и 8, а гонцы, стартовавшие из A_4 с задержкой в $L_{1,4}^0 = 3$ ед., придут соответственно к тем же пунктам в моменты $3 + 3 = 6$ и $3 + 2 = 5$, при этом первым прибудет лидер $L_{4,6}$ из группы $i = 4$ в пункт A_6 , т.к. из всех указанных времен его время минимально (численно оно равно длине очередного кратчайшего маршрута $L_{1,6}^0 = 5$, $\mu_{1,6}^0 = \langle 1,4,6 \rangle$). Вводя понятие «лидер», мы получаем возможность сократить количество элементарных операций и число записей (табл. 7; $t = 2$). Удаляя из табл. 1 столбец, соответствующий конечному пункту A_i найденного кратчайшего маршрута, сокращаем объём вычислений в дальнейшем.

Таким образом, путём введения **единой шкалы измерения времени** (длины пути) лидеров обеспечивается *прямое сравнение их времен*. Это гарантирует точность решения и отсеивание доминируемых маршрутов.

¹ Предполагается, что матрица c не содержит отрицательных элементов.

Объём вычислений зависит от конкретной топологической структуры матрицы \mathbf{c} , поэтому заранее дать оценку требуемого числа элементарных операций сравнения (N^c) и сложения (N^+) не представляется возможным. Получим оценку числа элементарных операций **сверху**, полагая, что матрица \mathbf{c} заполнена **полностью**, кроме элементов главной диагонали ($\varphi = 1$). Будем также считать, что строится **всё множество кратчайших маршрутов** и что на каждой из $n - 1$ итераций определяется только **один** кратчайший маршрут.

Требуемые количества операций сравнения и сложения на каждом шаге процесса, получаемые путём непосредственного подсчёта в соответствии со схемой алгоритма эстафетного метода, приведены в табл. 10.

Общее число операций ¹ тогда будет равно:

$$\bar{N}^c = \sum_{t=1}^{n-1} [(n-t-1)t + t - 1] = n(n-1)(n-2)/6 \leq 0,1n^3, \quad (n > 4), \quad (2.6)$$

$$\bar{N}^+ = \sum_{t=1}^{n-1} (t-1) = (n-1)(n-2)/2 < 0,25n^2, \quad (n > 3). \quad (2.7)$$

Таблица 10

| t | N_t^c | N_t^+ | $ I^t $ |
|-------|--------------------|---------|---------|
| 1 | $n-2$ | 0 | 1 |
| 2 | $2(n-3)+1$ | 1 | 2 |
| 3 | $3(n-4)+2$ | 2 | 3 |
| ... | ... | ... | ... |
| t | $(n-t-1)t + t - 1$ | $t-1$ | t |
| ... | ... | ... | ... |
| $n-1$ | $0+n-2$ | $n-2$ | $n-1$ |

Чтобы приблизить оценку сверху \bar{N}^c к реальному значению N^c , предположим, что величина \bar{N}^c пропорциональна коэффициенту полноты φ ¹, тогда окончательно получим

$$N^c = \bar{N}^c \varphi = \varphi \cdot n(n-1)(n-2)/6. \quad (2.8)$$

¹ Например, при $\varphi = 0,5$ и равномерном расположении элементов c_{ij} в матрице \mathbf{c} (шахматная доска!) ясно, что число сравнений уменьшится вдвое.

Оценка \bar{N}^+ от коэффициента φ практически не зависит. Согласно (2.8) и (2.7) для решенного примера ($n = 6$ и $\varphi = 0,4$) оценки соответственно равны $N^c = 8$ и $\bar{N}^+ = 8$, что несколько отличается от реальных значений (табл. 5; $N^c = 11$, $N^+ = 7$). По мере увеличения размера n матрицы \mathbf{c} следует ожидать, что вследствие действия закона больших чисел [10; с. 52], [11] расхождение в оценках будет уменьшаться.

Требуемый объем вычислений при построении конкретного маршрута $\mu_{k,l}^0$ также оценится по (2.6) и (2.7), при этом степень полинома уменьшится на 1 единицу, если появление пункта A_l равновозможно на каждой итерации (рис. 2; 8^0).

Степень полинома в (2.6), (2.7) увеличится на 1 единицу при поиске множества кратчайших маршрутов для всех сочетаний (k,l) , $k,l = \overline{1,n}$.

Требуемый объём памяти ОЗУ в основном будет определяться числом значащих элементов матрицы \mathbf{c} (для каждого элемента должны отводиться ячейки для хранения трёх чисел (c_{ij}, i, j)). Часть памяти выделяется для алгоритма и хранения получаемых результатов (табл. 3).

Выводы

1. Если маршрут $\mu_{k,l}^0$ является кратчайшим, то и маршрут **от любой его вершины до любой из последующих вершин также является кратчайшим**, что следует из предположения об обратном. Действительно, если длину какого-то из частных маршрутов удастся уменьшить, то уменьшится и длина маршрута $\mu_{k,l}^0$, что противоречит условию.

2. Из первого вывода следует, что кратчайший маршрут можно рассматривать как *сплайн* кратчайших маршрутов. Обратное неверно, например:

$L(\langle 6,3,4,5 \rangle \cup \langle 5;2 \rangle) = L\langle 6,3,4,5,2 \rangle = 12$, однако $L\langle 6;2 \rangle = 4$ – кратчайший маршрут (табл. 9).

3. В кратчайший маршрут ни одна вершина не может быть включена более одного раза, т.е. кратчайший маршрут – **элементарный путь** (иначе длину кратчайшего маршрута можно было бы уменьшить, что противоречит определению кратчайшего маршрута).

4. В кратчайший маршрут ни одна дуга не включается более одного раза, т.е. кратчайший маршрут – **простой путь** [1; с. 13].

5. С незначительными изменениями эстафетный метод может быть применён для построения запасного маршрута, кратчайшего из оставшихся после построения основного кратчайшего маршрута.

6. Если совместно с матрицей **расстояний** $\mathbf{c} = \|c_{ij}\|$ задана и матрица

средних скоростей $\|v_{ij}\|$ передвижения по каждому участку c_{ij} , то, вычислив матрицу времен $\tau = \|\tau_{ij}\|$ ($\tau_{ij} = c_{ij} / v_{ij}$) и применив рассмотренный метод (рис. 2) для каждой пары (k, j) , получим маршрут $\mu_{k,l}^0$, **кратчайший по времени**.

7. Эстафетный метод не потребует существенных изменений, если вместо кратчайшего строить наиболее *длинный* маршрут (**критический путь**), что необходимо при сетевых методах планирования. В алгоритме (рис. 2) в пунктах 4^0 , 6^0 потребуется **min** заменить на **max**, при этом согласно 9^0 появление циклов исключается.

8. При машинной реализации алгоритма эстафетного метода (рис. 2) время задержки (расстояние отставания) T_i^c (табл. 2) целесообразно добавлять ко всем элементам c_{ij} i -й строки, сохранившимся к t -му шагу процесса ($i \in G_i^t$).

Примечание. Статистическая обработка всего семейства кратчайших маршрутов (табл. 9) позволяет решать ряд практических вопросов, связанных с проектированием и функционированием сетей передачи данных (СПД): оптимизация топологической структуры СПД, задачи маршрутизации информационных потоков, обоснование пропускных способностей линий связи и узлов коммутации [3, 8, 6] и др.

Перейдем к рассмотрению другого класса задач построения кратчайшего пути на графе при некотором дополнительном условии: кратчайший маршрут $\mu_{k,l}$ должен пройти через **все вершины графа хотя бы один раз** (или только один раз – гамильтонов путь или гамильтонов цикл).

3. КЛАССИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА И ЕЕ РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ РАСШИРЕНИЯ ЦИКЛА

3.1. Постановка классической задачи коммивояжера ($\varphi = 1$)

Классическая задача коммивояжера хорошо известна по многим источникам [1, 2, 12, 5] и проста по своей содержательной постановке.

В классической задаче коммивояжера полагается, что коммивояжер, выходя из пункта A_k , по кратчайшему пути должен посетить каждый пункт **ровно один раз** и возвратиться в исходный пункт. Подобная жесткость требования может представлять математический интерес,

однако для практических целей более приемлемым является некоторое ослабление этого требования, когда коммивояжер должен посетить каждый пункт **по крайней мере один раз**. Ослабление жесткости ограничения в ряде случаев будет способствовать уменьшению длины пути коммивояжера.

Классическая задача коммивояжера относится по степени сложности к классу NP-полных задач [13, 14], и ее постановка в форме задачи математического программирования со скалярными переменными [5, 12] не позволяет создать достаточно эффективные алгоритмы, особенно для решения задач больших размеров. Поэтому нужны специальные методы, не связанные с классическим подходом, основанным на аппарате анализа бесконечно малых. В [12] приведен анализ существующих наиболее эффективных методов решения, при этом все они при решении задач больших размеров носят неформальный характер. Наиболее успешные реализации приближенных алгоритмов связаны с двумя схемами решения: **улучшения исходного цикла** (схема А) и **последовательного построения цикла** (схема В). Предлагаемый метод расширения цикла ближе примыкает к схеме В, однако отличается от нее тем, что в качестве исходного берется уже готовый (начальный) цикл с одной или несколькими промежуточными вершинами.

Комбинаторная постановка задачи коммивояжера состоит в поиске такого замкнутого маршрута с началом и концом в одной вершине, который включает в себя все остальные вершины и длина его при этом минимальна. Формальную постановку задачи можно записать в виде

$$L(\mu_k^{n-1}) = \sum_{(i,j) \in \mu_k} c_{ij} \rightarrow \min_{\mu_k},$$

$$\mu_k^{n-1} = \langle k, \dots, j, \dots, k \rangle \in \{\mu_k^{n-1}\}^1,$$

где $L(\mu_k^{n-1})$ – длина цикла как сумма длин дуг (i, j) , входящих в цикл μ_k^{n-1} ; μ_k^{n-1} – контур (цикл), содержащий в качестве промежуточных все $n - 1$ остальных вершин графа (гамильтонов цикл).

Как отмечалось, можно рассматривать постановку классической задачи с **жестким** или **ослабленным** требованием на количество вершин каждого типа в конечном цикле. Это влияет на метод решения. Метод существенно зависит и от *полноты* матрицы расстояний c . Рассмотрим наиболее простую версию метода расширения цикла, позволяющую достаточно эффективно решать классическую задачу коммивояжера при **жестком** требовании на число вершин в решении и максимальной полноте матрицы c ($\varphi = 1$).

¹ Множество $\{\mu_k^{n-1}\}$ содержит по крайней мере $(n - 1)!$ элементов.

3.2. Метод расширения цикла, алгоритм, пример вычисления и эффективность алгоритма

Суть метода расширения цикла состоит в следующем. Вначале по определенным правилам формируется **начальный цикл** μ_k^1 , и далее в ходе решения последовательно в промежутки между вершинами текущего цикла μ_k^t по определенным правилам включаются другие вершины графа, еще не вошедшие в текущий цикл μ_k^t . Процесс заканчивается после включения всех вершин в цикл ($t = n - 1$).

Правила формирования начального цикла и включения в него вершин определяют степень эффективности получаемого решения и требуемый объем вычислений. Наиболее простая версия метода расширения цикла состоит в следующем.

Между начальным и конечным номерами вершин ($k = 1$) включается номер j – любой из множества $G^t = \{j\}_{n-1}^t$ оставшихся вершин ($j \in G^t$). Сформированный таким образом начальный цикл $\mu^1 k = \langle k, j, k \rangle$ *не исключает* возможность получения оптимальной последовательности номеров в конечном цикле¹. Правило включения очередной вершины (ее номера) в некоторый из промежутков текущего цикла состоит в том, что **увеличение длины цикла δ^t , получаемое на t -м шаге принудительного включения номера вершины A_j , должно быть минимальным.**

Приращение $\delta_{k,j,i}^t$, получаемое при пробном включении j между номерами вершин A_k и A_i , вычисляется по формуле

$$\delta_{k,j,i}^t = c_{kj} + c_{ji} - c_{ki}, \quad j \in G^t. \quad (3.1)$$

Первые два числа – это длина полученного ломаного маршрута между вершинами A_k и A_i , а c_{ki} – длина *прежнего* пути между этими же вершинами дуги. Если $\delta_{k,j,i}^t < 0$, то обходной путь короче, чем прямой – c_{ki} – длина цикла уменьшится.

На t -м шаге процесса текущий цикл будет содержать $t + 1$ промежутков (интервалов) для пробного включения очередного номера $j \in G^t$. Для каждого интервала по формуле (3.1) потребуется вычислить $n - 1 - t$ членов. Следовательно, для получения решения всего потребуется вычислить N членов (3.1):

$$N = \sum_{t=1}^{n-2} (n - 1 - t) \cdot (t + 1) = \frac{1}{6} (n - 1)(n - 2)(n + 3) < 0,2 \cdot n^3.$$

¹ Если в начальный цикл включить номера сразу двух вершин, то их очередность может оказаться не такой, как в оптимальном цикле, а следовательно, решение уже не может быть точным.

Для вычисления одного элемента (3.1) требуются две операции (сложение, вычитание) и операция сравнения с предыдущим элементом.

Примечание. Наиболее простой алгоритм (на каждом шаге идти к ближайшей вершине [12]) требует всего $0,5n^2$ операций сравнения, однако возможная погрешность при этом не поддается оценке. Сравнение с оценками, приводимыми в [12] для наилучших из приближенных алгоритмов (алгоритм Линна $\sim 3,5n^3(n-4)!$), позволяет рассчитывать на более высокую вычислительную эффективность метода расширения цикла.

Блок-схема алгоритма метода расширения цикла приведена на рис. 3.

Работу алгоритма проиллюстрируем на числовом примере, матрица расстояний для которого представлена в табл. 11.

Ниже приведены вычисления для случая отправления коммивояжера из пункта A_1 ($k = 1$).

Согласно пункту 2° (рис. 3) начальный цикл и необходимые данные записаны для шага $t = 1$ в (3.2).

Таблица 11. $\mathbf{c} = \|c_{ij}\|$

| $i \backslash j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|----|-----------|-----------|----|----|----|
| 1 | | 6 | 13 | 27 | 18 | 25 |
| 2 | 10 | | 20 | 1 | 9 | 23 |
| 3 | 22 | 28 | | 15 | 8 | 3 |
| 4 | 19 | 2 | 30 | | 12 | 17 |
| 5 | 14 | 11 | 26 | 29 | | 5 |
| 6 | 24 | 7 | 16 | 4 | 21 | |

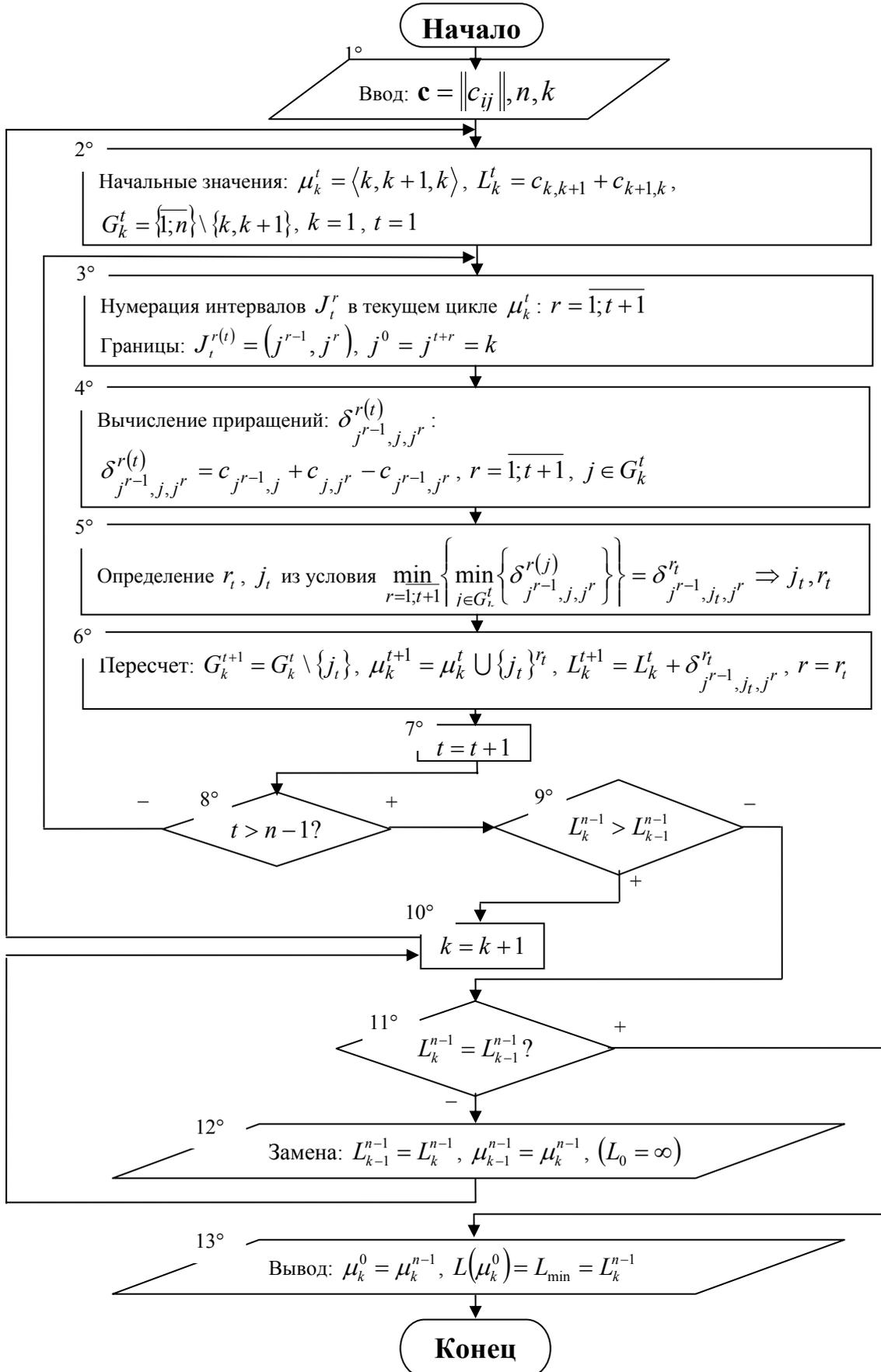


Рис. 3. Блок-схема алгоритма метода расширения цикла

$$\mathbf{t} = \mathbf{1}: L^1\langle 1,2,1 \rangle = 16, k = 1, G^1 = \{3,4,5,6\}. \quad (3.2)$$

$$\begin{array}{l} r = 1, \quad r = 2, \\ \left. \begin{array}{l} \delta_{1,3,2}^1 = \mathbf{13} + \mathbf{28} - \mathbf{6} = 35, \quad \delta_{2,3,1}^1 = 20 + 22 - 10 = 32, \\ \delta_{1,4,2}^1 = 27 + 2 - 6 = 23, \quad \delta_{2,4,1}^1 = 1 + 19 - 10 = \mathbf{10}, \\ \delta_{1,5,2}^1 = 18 + 11 - 6 = 23, \quad \delta_{2,5,1}^1 = 9 + 14 - 10 = 13, \\ \delta_{1,6,2}^1 = 25 + 7 - 6 = 26, \quad \delta_{2,6,1}^1 = 23 + 24 - 10 = 37. \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} r_1 = 2, \\ j_1 = 4, \\ \delta_{2,4,1}^1 = \mathbf{10}. \end{array}$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{2}: L^2\langle 1,2,4,1 \rangle = 26, G^2 = \{3,5,6\}.$$

$$\begin{array}{l} r = 1, \quad r = 2, \quad r = 3, \\ \left. \begin{array}{l} \delta_{1,3,2}^2 = 35, \quad \delta_{2,3,4}^2 = 20 + 15 - 1 = 34, \quad \delta_{4,3,1}^2 = 30 + 22 - 19 = 33, \\ \delta_{1,5,2}^2 = 23, \quad \delta_{2,5,4}^2 = 9 + 29 - 1 = 37, \quad \delta_{4,5,1}^2 = 12 + 14 - 19 = \mathbf{7}, \\ \delta_{1,6,2}^2 = 26, \quad \delta_{2,6,4}^2 = 23 + 4 - 1 = 26, \quad \delta_{4,6,1}^2 = 17 + 24 - 19 = 22. \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} r_2 = 3, \\ j_2 = 5, \\ \delta_{4,5,1}^2 = \mathbf{7}. \end{array}$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{3}: L^3\langle 1,2,4,5,1 \rangle = 33, G^3 = \{3;6\}.$$

$$\begin{array}{l} r = 1, \quad r = 2, \quad r = 3, \quad r = 4, \\ \left. \begin{array}{l} \delta_{1,3,2}^3 = 35, \quad \delta_{2,3,4}^3 = 34, \quad \delta_{4,3,5}^3 = 30 + 8 - 12 = 26, \quad \delta_{5,3,1}^3 = 26 + 22 - 14 = 34, \\ \delta_{1,6,2}^3 = 26, \quad \delta_{2,6,4}^3 = 26, \quad \delta_{4,6,5}^3 = 17 + 21 - 12 = 26, \quad \delta_{5,6,1}^3 = 5 + 24 - 14 = \mathbf{15}. \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} r_3 = 4, \\ j_3 = 5, \\ \delta_{5,6,1}^3 = \mathbf{15}. \end{array}$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{4}: L^4\langle 1,2,4,5,6,1 \rangle = 48, G^4 = \{3\}.$$

$$\begin{array}{l} r = 1, \quad r = 2, \quad r = 3, \quad r = 4, \quad r = 5, \quad r = 5, \\ \delta_{1,3,2}^4 = 35, \quad \delta_{2,3,4}^4 = 34, \quad \delta_{4,3,5}^4 = 26, \quad \delta_{5,3,6}^4 = 26 + 3 - 5 = 24, \quad \delta_{6,3,1}^4 = 16 + 22 - 24 = \mathbf{14} \Rightarrow \begin{array}{l} j_4 = 3, \\ \delta_{6,3,1}^4 = \mathbf{14} \end{array}$$

$$L_1^5 = L(\mu_1^{n-1}) = L^{n-1}\langle 1,2,4,5,6,3,1 \rangle = 62, G^5 = \emptyset. \quad (3.3)$$

После нумерации интервалов (3°), согласно (3.1) вычисляются приращения длины цикла (4°). Например, для вычисления приращения $\delta_{1,3,2}^1$ из табл. 11 извлекаются элементы, выделенные жирным шрифтом.¹

Примечание. При выполнении очередного $t + 1$ -го шага можно использовать приращения δ' , вычисленные на предыдущем шаге, т.к. приращения изменятся только в двух интервалах, смежных с

интервалом r_t , в который был включен номер вершины j_t на предыдущем шаге (см. $t = 2$). Расход памяти ОЗУ при этом увеличится, т.к. придется сохранять приращения δ^t от предыдущего шага.

После пересчета текущих величин (пункт 6°) осуществляется переход к очередному шагу цикла (пункт 7°) и проверяется, закончено ли формирование цикла. Если цикл еще не закончен (пункт 8° –, т.е. $G^t \neq \emptyset$ или $t \leq n-1$), то процесс продолжается (переход к 3°). В противном случае (8° +, $G^t = \emptyset$, т.е. $t > n-1$) полученный k -й вариант решения L_k^{n-1} по длине цикла сравнивается с предыдущим. Если он хуже предыдущего (9° +), то назначается $k+1$ -й исходный вариант (пункт 10°), и весь цикл расчетов повторяется. Пункты алгоритма (9° – 12°) позволяют улучшить решение и повысить его достоверность. Действительно, анализируя табл. 12, в которой записана динамика полученного решения (3.3) и решений при всех возможных $C_n^2 = 15$ начальных циклах¹ (элементы j_t , включаемые в цикл на t -м шаге, выделены жирным шрифтом), можно видеть, что оптимальные решения в зависимости от начального цикла появляются с некоторой частотой $P_1 = 11/15 = 0,73$. Следовательно, вычисляя последовательно m вариантов с различными начальными циклами, можно с вероятностью

$$P_m = 1 - (1 - P_1)^m \quad (3.4)$$

утверждать, что лучший из них является оптимальным.

При $m=3$ для $P_1 = 0,73$ вероятность P_m близка к единице ($P_3 \approx 0,98$). Этот результат подтверждается данными табл. 12: практически любая тройка случайно выбранных вариантов будет содержать хотя бы один оптимальный.

Поскольку априори вероятность P_1 неизвестна, то в алгоритме (рис. 3) реализована следующая схема останова процесса решения: процесс прекращается после появления варианта, **совпадающего с лучшим** к этому времени вариантом, хранящимся в ОЗУ ЭВМ (12°). В соответствии с этим правилом для полученного решения (3.3) будем иметь $L_1^5 = 62 \leq L_0 = \infty$ (9°–) и $62 \neq \infty$ (11°–), поэтому вместо $L_0 = \infty$ в ОЗУ записывается $L_1^5 = 62$, μ_1^5 (3.3) (12°). Вычисляются номер очередного варианта начального цикла (10°) и исходные данные нового цикла –

¹ Исходные циклы $\mu^1(k, j, k)$ и $\mu^1(j, k, j)$ приводят к одному и тому же решению, т.к. они равносильны перестановке интервалов, что на решение не влияет.

$\mu_2^1 = \langle 2,3,2 \rangle$ (2°). Полученное решение $L_2^5 \langle 2,1,3,5,6,4,2 \rangle = 42$, проходя цепочку 8^{0+} , 9^{0-} , 11^{0-} , 12^0 , заменяет прежнее лучшее решение $L_1^5 = 62$ на $L_2^5 = 42$ (12°).

Далее выполняется переход 10^0 к очередному варианту – $\mu_3^1 = \langle 3,4,3 \rangle$, (2°). Полученный третий вариант решения $L_3^5 \langle 3,5,6,4,2,1,3 \rangle = 42$ совпадает (табл. 12) с лучшим (11^{0+}). Это решение записывается как оптимальное (13^0).

Примечание. Если бы очередной начальный вариант μ_2^1 , как и μ_1^1 , дал бы ошибочное решение $L_2^5 = 62$, совпавшее с первым, то полученный согласно 11^{0+} результат также был бы ошибочным. Такой случай наиболее возможен, если вероятность P_1 низка и, следовательно, вероятность получения подряд двух неверных решений $(1 - P_1)^2$ велика. Снизить вероятность ошибочного решения можно заменой начального значения $L_0 = \infty$ на лучшее решение, полученное из ряда t вариантов. Приняв, например, $P_1 = 0,2$ при $t = 10$, согласно (2.8) почти достоверно можно утверждать, что лучший из этих 10 вариантов – оптимальный.

Другой способ снижения вероятности получения ошибочного решения состоит в прекращении процесса не после *однократного*, а после, например, *двукратного* совпадения лучших вариантов. Указанные доработки не повлияют существенно на порядок и объем вычислений.

Как и большинство неформальных (эвристических) методов, метод расширения цикла также является приближенным. Полагая, что выбор начального цикла для вычисления оптимального гамильтонова (полного) цикла равновероятен, оценим относительную статическую погрешность метода расширения цикла ε по данным табл. 12 для одного произвольно взятого начального цикла:

$$\varepsilon = \frac{1}{N_b} \sum_{l=1}^{N_b} \frac{(L_l^{n-1} - L^0)}{L^0} = \frac{(62 - 42) \cdot 4}{15 \cdot 42} = 0,127 \text{ (12,7\%)},$$

где $N_b = C_n^2$ – общее количество возможных вариантов; l – номер варианта.

Если снять жесткое условие об однократности включения номера вершины в цикл, то в ряде случаев некоторого улучшения полученного решения можно добиться путем проверки и выполнения **первого необходимого условия оптимальности: расстояние между любой парой смежных вершин (i,j) в решении равно длине кратчайшего маршрута между ними.**

Таблица 12. Динамика расширения цикла μ_k^t

| k | μ_k^1 | L_k^1 | μ_k^2 | L_k^2 | μ_k^3 | L_k^3 | μ_k^4 | L_k^4 | μ_k^5 | L_k^5 |
|---|-----------|---------|-----------|---------|-----------|---------|-------------|---------|---------------|-----------|
| 1 | 1,2,1 | 16 | 1,2,4,1 | 26 | 1,2,4,5,1 | 33 | 1,2,4,5,6,1 | 48 | 1,2,4,5,6,3,1 | 62 |
| | 1,3,1 | 35 | 1,3,5,1 | 35 | 1,3,5,2,1 | 42 | 1,3,5,4,2,1 | 62 | 1,3,5,6,4,2,1 | 42 |
| | 1,4,1 | 46 | 1,2,4,1 | 26 | 1,2,4,5,1 | 33 | 1,2,4,5,6,1 | 48 | 1,2,4,5,6,3,1 | 62 |
| | 1,5,1 | 32 | 1,2,5,1 | 29 | 1,2,3,5,1 | 48 | 1,2,4,3,5,1 | 59 | 1,2,4,6,3,5,1 | 62 |
| | 1,6,1 | 49 | 1,3,6,1 | 40 | 1,3,6,2,1 | 33 | 1,3,6,4,2,1 | 32 | 1,3,5,6,4,2,1 | 42 |
| 2 | 2,3,2 | 48 | 2,3,6,2 | 30 | 2,3,6,4,2 | 29 | 2,1,3,6,4,2 | 32 | 2,1,3,5,6,4,2 | 42 |
| | 2,4,2 | 3 | 2,4,1,2 | 26 | 2,4,5,1,2 | 33 | 2,4,5,6,1,2 | 48 | 2,4,5,6,3,1,2 | 62 |
| | 2,5,2 | 20 | 2,5,6,2 | 21 | 2,5,6,4,2 | 20 | 2,3,5,6,4,2 | 20 | 2,1,3,5,6,4,2 | 42 |
| | 2,6,2 | 30 | 2,5,6,2 | 21 | 2,5,6,4,2 | 20 | 2,1,5,6,4,2 | 39 | 2,1,3,5,6,4,2 | 42 |
| 3 | 3,4,3 | 45 | 3,6,4,3 | 37 | 3,6,4,2,3 | 29 | 3,6,4,2,1,3 | 32 | 3,5,6,4,2,1,3 | 42 |
| | 3,5,3 | 34 | 3,5,6,3 | 29 | 3,5,6,2,3 | 40 | 3,5,6,4,2,3 | 39 | 3,5,6,4,2,1,3 | 42 |
| | 3,6,3 | 19 | 3,5,6,3 | 29 | 3,5,6,2,3 | 40 | 3,5,6,4,2,3 | 39 | 3,5,6,4,2,1,3 | 42 |
| 4 | 4,5,4 | 41 | 4,5,6,4 | 21 | 4,2,5,6,4 | 20 | 4,2,1,5,6,4 | 39 | 4,2,1,3,5,6,4 | 42 |
| | 4,6,4 | 21 | 4,5,6,4 | 21 | 4,2,5,6,4 | 20 | 4,2,1,3,6,4 | 32 | 4,2,1,3,5,6,4 | 42 |
| 5 | 5,6,5 | 26 | 5,6,2,5 | 21 | 5,6,4,2,5 | 20 | 5,6,4,2,3,5 | 39 | 5,6,4,2,1,3,5 | 42 |

Это условие будет выполнено, если элементы c_{ij} являются минимальными в строках или столбцах матрицы c или, в противном случае, **будут заменены** кратчайшими маршрутами μ_{ij}^0 , например:

$$L\langle 1,2,4,5,6,3,1 \rangle = c_{12} + c_{24} + c_{45} + c_{56} + c_{63} + c_{31} = 6 + 1 + 12 + 5 + 16 + 22 = 62. \quad (3.5)$$

Три выделенных элемента не являются минимальными ни в столбцах, ни в строках матрицы c . Найденные для них кратчайшие маршруты и их длины соответственно равны:

$$L\langle 4,2,5 \rangle = 11, \quad L\langle 6,3 \rangle = 16 = c_{63}, \quad L\langle 3,6,4,2,1 \rangle = 19. \quad (3.6)$$

Заменяя соответствующие дуги в (3.5) на кратчайшие маршруты (3.6), получим улучшенное решение, в котором включенные элементы выделены жирным шрифтом: $L\langle 1,2,4,2,5,6,3,6,4,2,1 \rangle = 58$. В новом решении некоторые элементы содержатся более одного раза, а значит, могут быть удалены. *Если повторяющийся элемент совместно с двумя смежными с ним не образует кратчайший маршрут, то он удаляется (второе необходимое условие оптимальности)*. Согласно этому условию элемент $j = 4$ удаляется, так как маршрут $\langle 2,4,2 \rangle$ не является кратчайшим (табл. 14; $k = 2$).

Совместно с $j = 4$ удаляется и одна из двух оказавшихся рядом двоек. Окончательно получим $L\langle 1,2,5,6,3,6,4,2,1 \rangle = 55$.

Рассмотрим возможность модификации метода расширения цикла для дальнейшего снижения его средней погрешности и уменьшения объема вычислений, а главное – для расширения его общности.

Таблица 13. $\| c_{ij} \|$

| $i \backslash j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|----|----|----|----|----|----|
| 1 | | 6 | 13 | 27 | 18 | 25 |
| 2 | 10 | | 20 | 1 | 9 | 23 |
| 3 | 22 | 28 | | 15 | 8 | 3 |
| 4 | 19 | 2 | 30 | | 12 | 17 |
| 5 | 14 | 11 | 26 | 29 | | 5 |
| 6 | 24 | 7 | 16 | 4 | 21 | |

Таблица 14. Совмещенная матрица $\left\| \begin{array}{c} \mu_{kj}^0 \\ L_{kj}^0 \end{array} \right\|$

| $k \backslash j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|------------------------|---------------------------|--------------------|-------------------|------------------------|----------------------|
| 1 | $\frac{1,2,1}{16}$ | $\frac{1;2}{6}$ | $\frac{1;3}{13}$ | $\frac{1,2,4}{7}$ | $\frac{1,2,5}{15}$ | $\frac{1,3,6}{16}$ |
| 2 | $\frac{2;1}{10}$ | $\frac{2,4,2}{3}$ | $\frac{2;3}{20}$ | $\frac{2;4}{1}$ | $\frac{2;5}{9}$ | $\frac{2,5,6}{14}$ |
| 3 | $\frac{3,6,4,2,1}{19}$ | $\frac{3,6,4,2}{9}$ | $\frac{3,6,3}{19}$ | $\frac{3,6,4}{7}$ | $\frac{3;5}{8}$ | $\frac{3;6}{3}$ |
| 4 | $\frac{4,2,1}{12}$ | $\frac{4;2}{2}$ | $\frac{4,2,3}{22}$ | $\frac{4,2,4}{3}$ | $\frac{4,2,5}{11}$ | $\frac{4,2,5,6}{16}$ |
| 5 | $\frac{5;1}{14}$ | $\frac{5,6,4,2(5,2)}{11}$ | $\frac{5,6,3}{21}$ | $\frac{5,6,4}{9}$ | $\frac{5,6,4,2,5}{20}$ | $\frac{5;6}{5}$ |
| 6 | $\frac{6,4,2,1}{16}$ | $\frac{6,4,2}{6}$ | $\frac{6;3}{16}$ | $\frac{6;4}{4}$ | $\frac{6,4,5}{16}$ | $\frac{6,3,6}{19}$ |

3.3. Модифицированный метод расширения цикла, примеры вычислений и эффективность метода

Основное отличие модифицированного метода расширения цикла от метода расширения цикла состоит в том, что на каждом t -м шаге процесса при пробном включении j -й ($j \in G^t$) вершины в интервал $(k - i)$ вместо дуг (k, j) и (j, i) при вычислении приращения $\delta_{k,j,i}^t$ [см. формулу (3.1)] используются кратчайшие маршруты μ_{kj}^0 и $\mu_{j,i}^0$:

$$\delta_{k,j,i}^t = L(\mu_{kj}^0) + L(\mu_{ji}^0) - c_{ki} = L(\mu_{kj}^0 \cup \mu_{ji}^0) - c_{ki}, \quad j \in G^t, \quad (3.7)$$

где точки в (3.7) между $k, i; j, i$ отражают тот факт, что соответствующие вершины **соединены через кратчайшие маршруты**.

Использование (3.7) предполагает отказ от жесткого условия об однократности включения каждой вершины в цикл, а следовательно, создает дополнительные условия для уменьшения его длины.

Вычисление приращений по формуле (3.7) обеспечивает и выполнение отмеченного выше необходимого условия оптимальности, что исключает необходимость его проверки. Проиллюстрируем порядок расчетов на числовом примере табл. 13.

Из (3.7) видно, что для вычисления приращений исходной информацией будут являться кратчайшие маршруты μ_{kj}^0 и их длины, вычисляемые по мере необходимости эстафетным методом (рис. 2), и длины дуг c_{ij} (табл. 13). Для иллюстрации удобно кратчайшие маршруты и их длины вычислить заранее и поместить в совмещенной матрице $\|\mu_{kj}^0/L_{kj}^0\|$ (табл. 14). Длины дуг c_{ij} записаны в табл. 13. Например, для начального цикла $\langle 3,6,3 \rangle$ согласно табл. 14 имеем

$$t = 1; L^1\langle 3,6,3 \rangle, G^1 = \{1,2,4,5\}$$

| $r^t = 1$ | $r^t = 2$ |
|--|---|
| $\delta_{3,1,6}^1 = L\langle 3,6,4,2,1,3,6 \rangle - 3 = 19 + 16 - 3 = 32$ | $\gamma_{3,4,6}^1 = 107, \delta_{6,1,3}^2 = L\langle 6,4,2,1,3 \rangle - 16 = 16 + 13 - 16 = 13, \gamma_{6,1,3}^2 = 43,$ |
| $\delta_{3,2,6}^1 = L\langle 3,6,4,2,5,6 \rangle - 3 = 9 + 14 - 3 = 20$ | $\gamma_{3,2,6}^1 = 67, \delta_{6,2,3}^2 = L\langle 6,4,2,3 \rangle - 16 = 6 + 20 - 16 = 10, \gamma_{6,2,3}^2 = 5, \quad (3.8)$ |
| $\delta_{3,4,6}^1 = L\langle 3,6,4,2,5,6 \rangle - 3 = 7 + 16 - 3 = 20$ | $\gamma_{3,4,6}^1 = 67, \delta_{6,4,3}^2 = L\langle 6,4,2,3 \rangle - 16 = 4 + 22 - 16 = 10, \gamma_{6,4,3}^2 = 5,$ |
| $\delta_{3,5,6}^1 = L\langle 3,5,6 \rangle - 3 = 8 + 5 - 3 = 10$ | $\gamma_{3,5,6}^1 = 10, \delta_{6,5,3}^2 = L\langle 6,4,5,6,3 \rangle - 16 = 16 + 21 - 16 = 21, \gamma_{6,5,3}^2 = 105.$ |

Принудительно включаемый в r -й интервал текущего цикла элемент j (3.7), разделяющий кратчайшие маршруты μ_{kj}^0 и μ_{ji}^0 , выделен в (3.8) жирным шрифтом. Длины соответствующих кратчайших маршрутов берутся из табл. 14, например $L_{k,j}^0 = L_{3,1}^0\langle 3,6,4,2,1 \rangle = 19$, $L_{1,6}^0 = L\langle 1,3,6 \rangle = 16$, $c_{3,6} = 3$ (табл. 13). Однако теперь совместно с принудительно включаемым в цикл элементом j в цикл могут быть попутно включены и некоторые другие элементы из множества G^t .

Таким образом, наряду с показателем $\delta_{k,j,i}^t$ необходимо учитывать и другой показатель $n_{k,j,i}^t$ – общее количество номеров вершин, $\{j\} \subset G^t$, которые впервые включаются в цикл на t -м шаге. Например, при вычислении $\delta_{3,1,6}^1$ (3.8) наряду с элементом $j = 1$ в цикл будет включено и множество элементов $\{j\} = \{2,4\} \subset G^1$.

Указанные два частных критерия могут быть объединены в один: **среднее приращение длины цикла, приходящееся на каждый впервые включенный элемент $j \in G^t$,**

$$\gamma_{k,j,i}^t = \delta_{k,j,i}^t / n_{k,j,i}^t, j \in G^t, \forall r^t. \quad (3.9)$$

Вычисленный удельный прирост длины цикла (3.9) эквивалентен

главному критерию $L(\mu_k)$, т.к. при $n = const$ минимизация среднего расстояния между вершинами $L(\mu_k)/n$ равносильна минимизации его длины $L(\mu_k)$.

Из (3.8) следует, что

$$\delta_{6:1:3}^1 = 13, n_{6:1:3}^1 = 3, (\{j\} = \{4, 2, 1\} \subset G^1) \text{ и } \gamma_{6:1:3}^1 = 13/3 \approx 4,3.$$

Найденный удельный прирост является **минимальным** для всех $j \in G^1$ и интервалов r^1 (3.8). Поэтому на первом шаге в интервал с номером $r^t = r^1 = 2$ между его левой ($j = 6$) и правой ($j = 3$) границами включаются элементы $\{j_t\} = \{4, 2, 1\}$ (см. $L\langle 6, 4, 2, 1, 3 \rangle$, $\delta_{6:1:3}^1$ в (3.8)).

После пересчета текущих величин ко второму шагу процесса имеем

$$t = 2: L^2\langle 3, 6, 4, 2, 1, 3 \rangle = 32, G^2 = \{5\}.$$

Так как осталось включить в цикл только один элемент, то согласно (3.9) для каждого интервала имеем $\gamma_{k:5:i}^2 = \delta_{k:5:i}^2$:

$$\begin{array}{ccc} r^2 = 1 & r^2 = 2 & r^2 = 3 \\ \delta_{3:5:6}^2 = \mathbf{10}, & \delta_{6:5:4}^2 = 16 + 9 - 4 = 21, & \delta_{4:5:2}^2 = 11 + 11 - 2 = 20, \\ \\ r^2 = 4 & r^2 = 5 & \\ \delta_{2:5:1}^2 = 9 + 14 - 10 = 13, & \delta_{1:5:3}^2 = 15 + 21 - 13 = 23. & \end{array}$$

Поскольку минимальное приращение соответствует включению элемента $j_2 = 5$ в первый интервал, то согласно (3.7) и табл. 14 в развернутом виде имеем

$$\delta_{3:5:6}^2 = L\langle \mu_{3,5}^0 \cup \mu_{5,6}^0 \rangle - c_{3,6} = L\langle 3, 5, 6 \rangle - c_{3,6} = 8 + 5 - 3 = 10,$$

т.е. в интервал $r^2 = 1$, $(3 \div 6)$ включается только элемент $j_2 = 5$.

Окончательно получаем

$$L\langle 3, \mathbf{5}, 6, 4, 2, 1, 3 \rangle = 42.$$

Исходный цикл влияет на точность решения, а в модифицированном методе расширения цикла он будет влиять и на объем вычислений. В

качестве начального цикла ($t=1$) в модифицированном методе расширения цикла целесообразно брать цикл, составленный из двух кратчайших маршрутов, которые *соединяются между собой включаемым в нулевой цикл $\langle k, k \rangle$ номером j* . По аналогии с методом расширения цикла можно записать

$$\mu_k^1 = \langle k \cdot j \cdot k \rangle, \text{ (метод расширения цикла } \mu_k^1 = \langle k, j, k \rangle),$$

$$k = \overline{1; n-1}, j \neq k, \quad (3.10)$$

где точка между индексами означает, что k , j и k соединены *кратчайшими маршрутами*. Например, на основании табл. 14 имеем

$$\mu_3^1 = \langle 3 \cdot 1 \cdot 3 \rangle = \langle 3, 6, 4, 2, 1, 3 \rangle, L_3^1 = L\langle \mu_3^1 \rangle = 19 + 13 - 0 = 32.$$

Совместно с принудительно включенным элементом $j=1$ в цикл вошли элементы $\{6; 4; 2\}$ ($n_{3,1,3} = 4$), и, следовательно, *удельный прирост* длины цикла (3.9) равен $\gamma_{3,1,3} = 32/4 = 8$.

В табл. 15 приведено множество решений, полученных методом расширения цикла и модифицированным методом расширения цикла при всех начальных циклах, образованных включением в цикл $\langle k, k \rangle$ элемента j по кратчайшим маршрутам согласно (3.10) и табл. 14.

Из сравнения вариантов решений, записанных в табл. 9, можно видеть, что средняя погрешность для модифицированного метода расширения цикла (ММРЦ) снизится до 7,6 % и останется практически прежней для метода расширения цикла (МРЦ) и совмещенного метода (5,2 %), (правый столбец). Для обоих методов число итераций существенно сокращается.

Если матрица c не является полной ($\varphi < 1$), то решение может быть получено **только модифицированным методом расширения цикла**. Решение также следует начать с нулевого цикла $\langle k, k \rangle$, поочередно включая в него элементы $j \neq k$. Порядок решения проиллюстрируем на числовом примере, представленном в табл. 16 (рис. 1).

Множество кратчайших маршрутов вычислено согласно алгоритму эстафетного метода (рис. 2) и записано в табл. 17. Начало цикла выбирается произвольно, пусть $k=1$.

Для начального цикла $\mu_1^0 = \langle 1; 1 \rangle$ с помощью табл. 17 запишем пять циклов первого шага с последовательным включением в них элемента $j \in G^1$, соединяющего два кратчайших маршрута.

Согласно (3.7) и табл. 17 для первого шага имеем:

$$\begin{aligned}
t = 1, \quad L(\mu_1^0) = 0, \quad G^1 = \{2,3,4,5,6\}: \\
\delta_{1.2.1}^1 = L\langle 1,4,6,2,3,1 \rangle - 0 = 9 + 11 = 20, \quad n_{1.2.1}^1 = 4, \quad \gamma_{1.2.1}^1 = 20/4 = 5,0; \\
\delta_{1.3.1}^1 = L\langle 1,4,6,3,1 \rangle - 0 = 8 + 5 = 13, \quad n_{1.3.1}^1 = 3, \quad \gamma_{1.3.1}^1 = 4,3; \\
\delta_{1.4.1}^1 = L\langle 1,4,6,3,1 \rangle - 0 = 3 + 10 = 13, \quad n_{1.4.1}^1 = 3, \quad \gamma_{1.4.1}^1 = 4,3; \\
\delta_{1.5.1}^1 = L\langle 1,4,5,2,3,1 \rangle - 0 = 6 + 17 = 23, \quad n_{1.5.1}^1 = 4, \quad \gamma_{1.5.1}^1 = 5,7; \\
\delta_{1.6.1}^1 = L\langle 1,4,6,3,1 \rangle - 0 = 5 + 8 = 13, \quad n_{1.6.1}^1 = 3, \quad \gamma_{1.6.1}^1 = 4,3.
\end{aligned}$$

В соответствии с минимальным удельным приращением цикла ($\gamma_{1.3.1}^1 = 4,3$) в цикл включено множество номеров $\{4,6,3\}$. За последующие два шага поочередно в цикл будут включены и последующие два оставшихся элемента множества $G^2 = \{2,5\}$. Однако для уменьшения числа шагов необходимо проверить возможность включения в цикл большего числа элементов, чем у маршрута $\mu_{1.3.1}^1$, который соответствует минимальному значению удельного приращения.

Цикл $\mu_{1.3.1}^1$ может быть заменен более расширенным циклом $\mu_{1.j.1}^1$ при выполнении трех условий:

- удельное приращение $\gamma_{1.j.1}^1$ является ближайшим к минимальному $\gamma_{1.3.1}^1$;
- новый цикл $\mu_{1.j.1}^1$ включает в себя рассматриваемый $\mu_{1.2.1}^1 = \langle 1,4,6,2,3,1 \rangle \supset \langle 1,4,6,3,1 \rangle = \mu_{1.3.1}^1$;
- новый цикл ($\mu_{1.3.1}^1$) содержит в себе большее количество элементов множества G^1 , чем $\mu_{1.3.1}^1$: $n_{1.j.1} > n_{1.3.1}$.

Этим условиям удовлетворяет только маршрут $\mu_{1.2.1}^1$ ($j = 2$), он доминирует над маршрутом $\mu_{1.3.1}^1$, ($\mu_{1.2.1}^1 \succ \mu_{1.3.1}^1$), поэтому после первого шага вместо $\mu_{1.3.1}^1$ получим

$$t = 2: L(\mu_{1.2.1}^1) = L\langle 1,4,6,2,3,1 \rangle = 20, \quad G^2 = \{5\}. \quad (3.11)$$

Таблица 15

| $k \cdot j \cdot k$ | Начальные циклы | | | | | МРЦ | | | ММРЦ | | | min | |
|-------------------------|-----------------|---------|---------------------------|--------------------------------|---------------------------|-----------------|---------|----------------|---------------------|-------|----------------|----------------|----------------|
| | μ_k^1 | L_k^1 | $n_{k \cdot i \cdot k}^1$ | $\gamma_{k \cdot i \cdot k}^1$ | $G_{k \cdot i \cdot k}^1$ | $\mu_k(j)$ | L_k^1 | ΔL_k^1 | $\mu_k(j)$ | L_k | ΔL_k^2 | ΔL_k^1 | ΔL_k^2 |
| 1·2·1 | 1,2,1 | 16 | 1 | 16 | 3,4,5,6 | 1,2,4,5,6,3,1 | 62 | 20 | 1,3,6,4,2,5,6,4,2,1 | 52 | 10 | 10 | 10 |
| 1·3·1 | 1,3,6,4,2,1 | 32 | 4 | 8,0 | 5 | 1,3,5,6,4,2,1 | 42 | 0 | 1,3,5,6,4,2,1 | 42 | 0 | 0 | 0 |
| 1·4·1 | 1,2,4,2,1 | 19 | 2 | 9,5 | 3,5,6 | 1,2,4,2,5,6,3,1 | 61 | 19 | 1,3,6,4,2,5,6,4,2,1 | 52 | 10 | 10 | 10 |
| 1·5·1 | 1,2,5,1 | 29 | 2 | 14,5 | 3,4,6 | 1,2,4,3,5,1 | 62 | 20 | 1,3,6,4,2,5,6,4,2,1 | 52 | 10 | 10 | 10 |
| 1·6·1 | 1,3,6,4,2,1 | 32 | 4 | 8,0 | 5 | 1,3,5,6,4,2,1 | 42 | 0 | 1,3,5,6,4,2,1 | 42 | 0 | 0 | 0 |
| 2·3·2 | 2,3,6,4,2 | 29 | 3 | 9,7 | 1;5 | 2,1,3,5,6,4,2 | 42 | 0 | 2,1,3,5,6,4,2, | 42 | 0 | 0 | 0 |
| 2·4·2 | 2,4,2 | 3 | 1 | 3 | 1,3,5,6 | 2,4,5,6,3,1,2 | 62 | 20 | 2,5,1,3,6,4,2 | 45 | 3 | 3 | 3 |
| 2·5·2 | 2,5,6,4,2 | 20 | 3 | 6,7 | 1;3 | 2,1,3,5,6,4,2 | 42 | 0 | 2,5,4,1,3,6,4,2 | 45 | 3 | 0 | 0 |
| 2·6·2 | 2,5,6,4,2 | 20 | 3 | 6,7 | 1;3 | 2,1,3,5,6,4,2 | 42 | 0 | 2,5,1,3,6,4,2 | 45 | 3 | 0 | 0 |
| 3·4·3 | 3,6,4,2,3 | 29 | 3 | 9,7 | 1;5 | 3,5,6,4,2,1,3 | 42 | 0 | 3,5,6,4,2,1,3 | 42 | 0 | 0 | 0 |
| 3·5·3 | 3,5,6,3 | 29 | 2 | 14,5 | 1,2,4 | 3,5,6,4,2,1,3 | 42 | 0 | 3,5,6,4,2,1,3 | 42 | 0 | 0 | 0 |
| 3·6·3 | 3,6,3 | 19 | 1 | 19 | 1,2,4,5 | 3,5,6,4,2,1,3 | 42 | 0 | 3,5,6,4,2,1,3 | 42 | 0 | 0 | 0 |
| 4·5·4 | 4,2,5,6,4 | 20 | 3 | 6,7 | 1;3 | 4,2,1,3,5,6,4 | 42 | 0 | 4,2,5,1,3,6,4 | 45 | 3 | 0 | 0 |
| 4·6·4 | 4,2,5,6,4 | 20 | 3 | 6,7 | 1;3 | 4,2,1,3,5,6,4 | 42 | 0 | 4,2,5,1,3,6,4 | 45 | 3 | 0 | 0 |
| 5·6·5 | 5,6,4,5 | 21 | 2 | 10,5 | 1,2,3 | 5,6,4,2,1,3,5 | 42 | 0 | 5,1,3,6,4,2,5 | 45 | 3 | 0 | 0 |
| $\sum \Delta L_k^i$ | | | | | | | | 79 | | | | 48 | 33 |
| $\varepsilon \%, (2.7)$ | | | | | | | | 12,5 | | | | 7,6 | 5,2 |

В один из пяти интервалов цикла осталось включить только номер вершины $j = 5$. На основании (3.7) и табл. 17 имеем

$$r = 1:$$

$$\delta_{1.5.4}^2 = L\langle 1, \mathbf{5}, 2, 3, 4, \rangle - c_{1.4} = 6 + 15 - 3 = 18 = \gamma_{1.5.4}^2,$$

$$r = 2:$$

$$\delta_{4.5.6}^2 = L\langle 4, \mathbf{5}, 2, 3, 4, 6 \rangle - c_{4.6} = 3 + 17 - 2 = 18 = \gamma_{4.5.6}^2,$$

$$r = 3:$$

$$\delta_{6.5.2}^2 = L\langle 6, 3, 4, \mathbf{5}, 2 \rangle - c_{6.2} = 9 + 6 - 4 = \mathbf{11} = \gamma_{6.5.2}^2,$$

$$r = 4:$$

$$\delta_{2.5.3}^2 = L\langle 2, 3, 4, \mathbf{5}, 2, 3 \rangle - c_{2.3} = 12 + 12 - 6 = 18 = \gamma_{2.5.3}^2,$$

$$r = 5:$$

$$\delta_{3.5.1}^2 = L\langle 3, 4, \mathbf{5}, 2, 3, 1 \rangle - c_{3.1} = 6 + 17 - 5 = 18 = \gamma_{1.5.4}^2.$$

Таблица 16. $\mathbf{c} = \| c_{ij} \|$, $\varphi = 0,4$

| $i \backslash j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|----|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | 3 | 6 | 8 |
| 2 | 13 | | 6 | | | |
| 3 | 5 | | | 3 | | |
| 4 | | | | | 3 | 2 |
| 5 | | 6 | | | | |
| 6 | | 4 | 3 | | | |

В соответствии с минимальным удельным приращением $\gamma_{6.5.2}^2 = 11$ в интервал $r = 3$ в (3.11) включаются номера вершин $\{3, 4, 5\}$, из них два – **повторно**. Окончательно, заменяя интервал $\langle 6; 2 \rangle$ в (3.11) на $\langle 6, 3, 4, \mathbf{5}, 2 \rangle$, получим

$$L\langle 1, 4, 6, 3, 4, 5, 2, 3, 1 \rangle = 31. \quad (3.12)$$

Решение оптимально.

Таблица 17. Совмещенная матрица КМ $\left\| \begin{matrix} \mu_{kj}^0 \\ L_{kj}^0 \end{matrix} \right\|$

| $k \backslash j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|------------------------|------------------------|---------------------|----------------------|------------------------|------------------------|
| 1 | $\frac{1,4,6,3,1}{13}$ | $\frac{1,4,6,2}{9}$ | $\frac{1,4,6,3}{8}$ | $\frac{1;4}{3}$ | $\frac{1,4,5(4,5)}{6}$ | $\frac{1,4,6}{5}$ |
| 2 | $\frac{2,3,1}{11}$ | $\frac{2,3,4,6,2}{15}$ | $\frac{2;3}{20}$ | $\frac{2,3,4}{9}$ | $\frac{2,3,4,5}{12}$ | $\frac{2,3,4,6}{11}$ |
| 3 | $\frac{3;1}{5}$ | $\frac{3,4,6,2}{9}$ | $\frac{3,4,6,3}{8}$ | $\frac{3;4}{3}$ | $\frac{3,4,5}{6}$ | $\frac{3,4,6}{5}$ |
| 4 | $\frac{4,6,3,1}{10}$ | $\frac{4,6,2}{6}$ | $\frac{4,6,3}{5}$ | $\frac{4,6,3,4}{8}$ | $\frac{4;5}{3}$ | $\frac{4;6}{2}$ |
| 5 | $\frac{5,2,3,1}{17}$ | $\frac{5;2}{6}$ | $\frac{5,2,3}{12}$ | $\frac{5,2,3,4}{15}$ | $\frac{5,2,3,4,5}{18}$ | $\frac{5,2,3,4,6}{17}$ |
| 6 | $\frac{6,3,1}{8}$ | $\frac{6;2}{4}$ | $\frac{6;3}{3}$ | $\frac{6,3,4}{6}$ | $\frac{6,3,4,5}{9}$ | $\frac{6,3,4,6}{8}$ |

Если в качестве начального цикла взять любой оптимальный неполный цикл (главная диагональ табл. 9), то также будут получены оптимальные решения, при этом решение (3.12) не является единственным, например:

$$L\langle 1,5,2,3,4,6,3,1 \rangle = 31.$$

Решение задачи при $\varphi < 1$ существует, если матрица $\mathbf{c} = \|c_{ij}\|$ является *сильно связной*. Необходимым и достаточным условием сильносвязности матрицы является возможность построения хотя бы одного гамильтонова цикла. Такой цикл возможен, если из матрицы \mathbf{c} может быть выделена подматрица, содержащая по одному элементу c_{ij} в каждой строке и каждом столбце, при этом ни одна пара элементов не является симметричной относительно главной диагонали. Полная матрица кратчайших маршрутов не существует, если матрица \mathbf{c} не является сильно связной.

Выводы

1. При полной ($\varphi = 1$) матрице смежности \mathbf{c} (матрице расстояний) для решения задачи определения *гамильтонова цикла* на графе наиболее целесообразно использовать метод расширения цикла (рис. 3). В качестве

начального цикла μ_k^H при этом могут быть использованы циклы, образованные двумя кратчайшими маршрутами ($\mu_k^H = \mu_{k \cdot j \cdot k}^H$, например $\mu_{1 \cdot 3 \cdot 1}^H$, табл. 15).

При определении кратчайшего *гамильтонова пути* также может быть применен метод расширения цикла, при этом *начальный путь* $\mu_{k,l}^H$ также может быть записан как $\mu_{k \cdot j \cdot l}^H$.

При снятии ограничения об однократности включения каждой промежуточной вершины в кратчайший цикл (путь) его длина, как правило, уменьшается. Квазигамильтонов цикл (путь)¹ при этом может быть найден методом расширения цикла с последующим улучшением на основе проверки **необходимого условия оптимальности** [см. (3.5), (3.6)]. Для решения может быть использован и модифицированный метод расширения цикла, при этом необходимость в проверке указанного условия оптимальности отпадает.

2. При полной ($\varphi = 1$) и симметрической матрице \mathbf{c} существует, как минимум, два оптимальных решения классической задачи коммивояжера, различающихся только ориентацией дуг в гамильтоновом цикле. При неполной матрице смежности \mathbf{c} ($\varphi < 1$) решение, как правило, одно и может быть получено *только модифицированным методом расширения цикла*.

3. Решение, содержащее в себе повторяющиеся элементы, может быть использовано для получения решения задачи о двух и более (в зависимости от числа повторяющихся элементов) коммивояжерах.

Так, например, из решения (3.12) имеем

$$L\langle 1,4,6,3,4,5,2,3,1 \rangle = 31 \Rightarrow \begin{cases} L^1\langle 4,6,3,4 \rangle = 8, & L^1\langle 3,4,5,2,3 \rangle = 18, \\ L^2\langle 4,5,2,3,1,4 \rangle = 23, & L^2\langle 3,1,4,6,3 \rangle = 13. \end{cases} \quad (3.13)$$

И в первом и во втором случае оба коммивояжера **вместе** могут выходить только из пунктов A_3 или A_4 , что, однако, не исключает возможность выхода каждого коммивояжера из любого пункта, входящего в его маршрут. Из (3.13) следует, что суммарная длина пути обоих коммивояжеров остается такой же, что и при одном, однако в первом варианте оба будут на месте через 23 ед. времени, а во втором – через 18 ед., если полагать, что скорости их перемещения постоянны и одинаковы.

По аналогии с 1-м выводом (раздел 2), если решение задачи для одного коммивояжера оптимально, то и разбиение большого цикла

¹ Так именуется гамильтонов цикл (путь), свободный от ограничения об однократности включения вершин.

указанным способом также будет оптимальным. Любое иное разбиение потребует введения новых дуг, а следовательно, и увеличения общей длины маршрутов.

4. В полученном решении в качестве исходного пункта может быть взята любая вершина ($k = \overline{1; n}$). Для этого достаточно номера, стоящие в цикле перед выбранным исходным номером k , перенести в конец кортежа и в конце приписать номер k . Например, для $k = 6$ из (3.18) получим

$$L\langle 6, 3, 4, 5, 2, 3, 1, 4, 6 \rangle = 31.$$

Для классической задачи коммивояжера решение **инвариантно к исходному пункту цикла**.

4. ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

4.1. Постановка обобщенной задачи коммивояжера

Содержательная постановка обобщенной задачи практически остаётся такой же, как и у классической задачи коммивояжера, с тем лишь добавлением, что коммивояжер, превратившись фактически в поставщика, должен выбрать такой маршрут для развозки грузов a_j ($j = \overline{1; n}$), при котором **энергозатраты будут минимальными**.

Задача, как и ранее, будет состоять в определении гамильтонова цикла μ_k^0 , соответствующего минимальным энергозатратам. Дополнительной исходной информацией, по сравнению с предыдущей задачей, будет являться вес груза a_j , который должен быть доставлен в пункт A_j ($j = \overline{1; n}$).

Поскольку в исходный пункт A_k груз a_k доставлять не требуется, то под величиной a_k будем понимать вес **самого транспортного средства**, которое по циклу пройдет весь маршрут длиной $L_{kk} = L_k = L(\mu_k)$, энергозатраты на что составят $a_k \cdot L_k$ ед. (т·км, кг·м). Первый номер присвоим исходному пункту ($k = 1$), в который возвратится транспортное средство с пассивным грузом $a_1 = 1$.

Формальная постановка **обобщенной задачи коммивояжера** как задача минимизации энергозатрат $\mathcal{E}(\mu_1)$ путём выбора гамильтонова цикла μ_1 из всего их множества $\{\mu_1\}$ (4.2) при ограничениях на **частные**

маршруты μ_{1j} доставки грузов как частей цикла μ_1 (4.3) формализуются следующим образом:

$$\mathcal{E}(\mu_1) = \sum_{j=1}^n a_j L(\mu_{1j}) \rightarrow \min_{\mu_1} \quad (4.1)$$

$$\mu_1 \in \{\mu_1\}, \quad (4.2)$$

$$\mu_{1j} \subset \mu_1, \quad j = \overline{1;n}. \quad (4.3)$$

Длина каждого частного маршрута определится как сумма длин дуг, входящих в маршрут:

$$L(\mu_{1j}) = L_{1j} = \sum_{(i,j) \in \mu_{1j}} c_{i,j}, \quad j = \overline{1;n}. \quad (4.4)$$

Поскольку в процессе решения гамильтонов цикл сформируется только к концу процесса расширения цикла, то в ходе решения некоторые обозначения в (4.1) – (4.4) потребуются дополнить индексом t , обозначающим номер шага (итерации) процесса МРЦ.

Когда для $\forall j \neq 1$ имеем $a_j = 0$, $a_1 = 1$, задача вырождается в обычную задачу коммивояжера.

4.2. Алгоритм решения обобщённой задачи коммивояжера методом расширения цикла при полной матрице расстояний ($\varphi = 1$) и пример расчёта

Схема решения остаётся такой же, что и в методе расширения цикла, при этом изменится только порядок определения приращения величины энергозатрат на текущем (t -м) шаге процесса.

Получим формулу для вычисления *приращения энергозатрат* на t -м шаге процесса при включении индекса γ в r -й интервал $(j^{r-1} \div j^r)$ цикла. Энергозатраты при этом повысятся **из-за увеличения общего перевозимого груза** на величину a_γ и **вследствие изменения длины цикла** на величину

$$\delta_{j^{r-1}, \gamma, j^r}^L = c_{j^{r-1}, \gamma} + c_{\gamma, j^r} - c_{j^{r-1}, j^r}. \quad (4.5)$$

Прирост энергозатрат по первой причине определится по формуле

$$\Delta_r^{t,1}(\gamma) = a_\gamma \cdot L_{1,\gamma}^t = a_\gamma \cdot \sum_{(i,j) \in \mu_{1,\gamma}^t} c_{i,j}, \quad (4.6)$$

где $L_{1,\gamma}^t$ – длина пути от исходного пункта A_1 до включенного в цикл пункта A_γ .

Изменение энергозатрат по второй причине будет обусловлено тем, что весь оставшийся, неразвезённый груз (к пунктам на оставшейся части $(\mu_{\gamma,1}^t)$ текущего цикла μ_1^t) придётся везти **дальше, чем прежде**, на величину $\delta_{j^{r-1},\gamma,j^r}^L$ (при $\delta^L > 0$), **или ближе** (при $\delta^L < 0$). С учётом (4.5) и (4.6) изменение энергозатрат по второй причине вычисляется по формуле

$$\Delta_r^{t,2}(\gamma) = \left(\sum_{j \in \mu_{\gamma,1}^t} a_j \right) \cdot \delta_{j^{r-1},\gamma,j^r}^L = \left(\sum_{j \in \mu_{\gamma,1}^t} a_j \right) \left(c_{j^{r-1},\gamma} + c_{\gamma,j^r} - c_{j^{r-1},j^r} \right). \quad (4.7)$$

Общее изменение энергозатрат как сумма приращений (4.6) и (4.7) на t -м шаге вычисляется по формуле

$$\Delta_r^t(\gamma) = a_\gamma \cdot \sum_{(i,j) \in \mu_{1,\gamma}^t} c_{ij} + \left(\sum_{j \in \mu_{\gamma,1}^t} a_j \right) \left(c_{j^{r-1},\gamma} + c_{\gamma,j^r} - c_{j^{r-1},j^r} \right), \quad \gamma \in G^t, \quad \forall r, \quad (4.8)$$

где $j \in \mu_{\gamma,1}^t$ означает, что суммирование грузов производится по тем пунктам, которые на t -м шаге находятся по маршруту $\mu_{\gamma,1}^t \subset \mu_1^t$.

Выбор номера интервала r_t и номера γ_t , включаемого в этот интервал, производится из условия минимума прироста энергозатрат:

$$\min_{r=1;t+1} \min_{\gamma \in G^t} \{ \Delta_r^t(\gamma) \} = \Delta_{r_t}^t(\gamma_{r_t}) \Rightarrow r_t, \gamma_{r_t},$$

где, как и ранее, G^t – множество номеров пунктов, ещё не вошедших в текущий цикл.

Полученные соотношения позволяют сформулировать алгоритм решения обобщенной задачи коммивояжера, блок-схема которого представлена на рис. 4. Работу алгоритма проиллюстрируем на числовом примере, представленном в табл. 18 ($\varphi = 1$) при $\mathbf{a} = (1, 2, 4, 3, 1)$.

Так как, в отличие от классической задачи коммивояжера, обобщенная задача коммивояжера неинвариантна к начальному пункту

цикла, то выбирается конкретный исходный пункт (пусть $k = 1$). Промежуточным пунктом A_m в исходном цикле μ_1^1 может быть выбран любой из оставшихся пунктов (пусть $m = 3$). Согласно 3^0 для исходного цикла $\mu_1^1 = (1,3,1)$ имеем

$$G^1 = \{1,2,3,4,5\} \setminus \{1,3\} = \{2,4,5\}, \mu_1^1 = \langle 1,3,1 \rangle,$$

$$\mathcal{E}_1^1 = \mathcal{E}(\mu_1^1) = a_3 c_{1,3} + a_1 (c_{1,3} + c_{3,1}) = 4 \cdot 17 + 1 \cdot (17 + 15) = 100.$$

Промежуточные данные расчётов, полученные для всех трёх шагов процесса решения методом расширения цикла, приведены в табл. 19. Например, при включении номера $\gamma = 2 \in G^2$ во второй интервал ($r = 2$) текущего ($t = 2$) цикла $\mu_1^2(\gamma)$ полное приращение энергозатрат $\Delta_2^2(2)$ согласно 5^0 (рис. 4) равно:

$$\Delta_r^t(\gamma) = \Delta_2^2(2) = \Delta \langle 1,4,2,3,1 \rangle = a_2 (c_{1,4} + c_{4,2}) + (a_3 + a_1)(c_{2,3} + c_{3,1} - c_{2,1}) =$$

$$2(3 + 8) + (4 + 1)(8 + 12 - 3) = 22 + 85 = 107.$$

Согласно пункту 6^0 минимальный прирост энергозатрат на шаге $t = 2$ соответствует включению в интервал $r_2 = 1$ номера пункта A_2 ($\gamma_{r_2} = \gamma_1 = 2$)¹.

Примечание. В табл. 19 включаемые в текущий цикл номера пунктов и минимальные приросты энергозатрат выделены жирным шрифтом.

Из табл. 19 видна динамика решения обобщенной задачи коммивояжера методом расширения цикла.

На первом шаге согласно пункту 6^0 процесса ($t = 1$) в текущий цикл был включен элемент $\gamma_1 = 4$ (интервал $r = 4$), при этом энергозатраты не только не увеличились, но даже уменьшились ($\Delta \mathcal{E}^1(4) = -46 < 0$). Физически это обусловлено тем, что включение элемента $\gamma_1 = 4$ в интервал $r = 1$ сократило длину пути перевозки грузов к пунктам A_3 ($a_3 = 4$) и A_1 ($a_1 = 1$) на 11 ед. [см. формулу (4.5)]:

¹ Отрицательный прирост энергозатрат может быть получен в том случае, если включение в цикл номера γ_r приводит к уменьшению длины пути к последующим пунктам, что имеет место, например, на шаге $t = 1$ (табл. 19).

$$\delta_{1,4,3}^1 = c_{1,4} + c_{4,3} + c_{1,3} = 3 + 3 - 17 = -11,$$

что уменьшило энергозатраты на $(4 + 1) \cdot 11 = 55$ ед. [см. формулу (4.7)].

На втором шаге (табл. 19; $t = 2$) минимум прироста энергозатрат был получен при включении элемента $\gamma_1 = 2$ в первый интервал текущего цикла $\langle 1,4,3,1 \rangle$.

На третьем шаге в текущий цикл $\langle 1,2,4,3,1 \rangle$ включен последний, ещё не вошедший в цикл элемент $\gamma_4 = 5$, при этом энергозатраты возросли на 55 ед. и было получено следующее решение μ_1^3 и соответствующие ему энергозатраты:

$$\mu_1^{pu} = \langle 1,2,4,3,5,1 \rangle, \quad \mathcal{E}(\mu_1^{pu}) = \mathcal{E}\langle 1,2,4,3,5,1 \rangle = 127, \quad (4.9)$$

где pu – метод расширения цикла.

Таблица 18. $\mathbf{c} = \| c_{ij} \|$, $\varphi = 1$

| | | | | | |
|------------------|----|---|----|----|----|
| $i \backslash j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | | 1 | 17 | 3 | 6 |
| 2 | 14 | | 12 | 4 | 10 |
| 3 | 15 | 4 | | 19 | 21 |
| 4 | 5 | 8 | 3 | | 11 |
| 5 | 20 | 2 | 18 | 7 | |

$$(a_j) = (1, \quad 2, \quad 4, \quad 3, \quad 1)$$

Таблица 19

| $\mathbf{t} = 1, G^1 = \{2,4,5\}$ | | | $\mathbf{t} = 2, G^2 = \{2;5\}$ | | | $\mathbf{t} = 3, G^3 = \{5\}$ | | |
|--|---------------------------|----------------------------------|---|-----------------------------|----------------------------------|---|-------------------------------|----------------------------------|
| $\mathcal{E}_1^1 = \mathcal{E}\langle 1,3,1 \rangle = 100$ | | | $\mathcal{E}_1^2 = \mathcal{E}\langle 1,4,3,1 \rangle = 54$ | | | $\mathcal{E}_1^3 = \mathcal{E}\langle 1,2,4,3,1 \rangle = 72$ | | |
| r | $\mu_1^1(\gamma)$ | $\Delta \mathcal{E}_q^1(\gamma)$ | r | $\mu_1^2(\gamma)$ | $\Delta \mathcal{E}_q^1(\gamma)$ | r | $\mu_1^3(\gamma)$ | $\Delta \mathcal{E}_q^1(\gamma)$ |
| 1 | $\langle 1,2,3,1 \rangle$ | $2 - 20 = -18$ | 1 | $\langle 1,2,4,3,1 \rangle$ | $2 + 16 = 18$ | 1 | $\langle 1,5,2,4,3,1 \rangle$ | $6 + 70 = 76$ |
| 1 | $\langle 1,4,3,1 \rangle$ | $9 - 55 = -46$ | 1 | $\langle 1,5,4,3,1 \rangle$ | $6 + 80 = 86$ | 2 | $\langle 1,2,5,4,3,1 \rangle$ | $11 + 104 = 115$ |
| 1 | $\langle 1,5,3,1 \rangle$ | $6 + 35 = 41$ | 2 | $\langle 1,4,2,3,1 \rangle$ | $22 + 85 = 107$ | 3 | $\langle 1,2,4,5,3,1 \rangle$ | $16 + 130 = 146$ |
| 2 | $\langle 1,3,2,1 \rangle$ | $42 + 3 = 45$ | 2 | $\langle 1,4,5,3,1 \rangle$ | $14 + 130 = 144$ | 4 | $\langle 1,2,4,3,5,1 \rangle$ | $29 + 26 = 55$ |
| 2 | $\langle 1,3,4,1 \rangle$ | $108 + 9 = 117$ | 3 | $\langle 1,4,3,2,1 \rangle$ | $20 + 3 = 23$ | $\mathcal{E}^{pu} = \mathcal{E}\langle 1,2,4,3,5,1 \rangle = 127$ | | |
| 2 | $\langle 1,3,5,1 \rangle$ | $38 + 26 = 64$ | 3 | $\langle 1,4,3,5,1 \rangle$ | $27 + 26 = 53$ | | | |

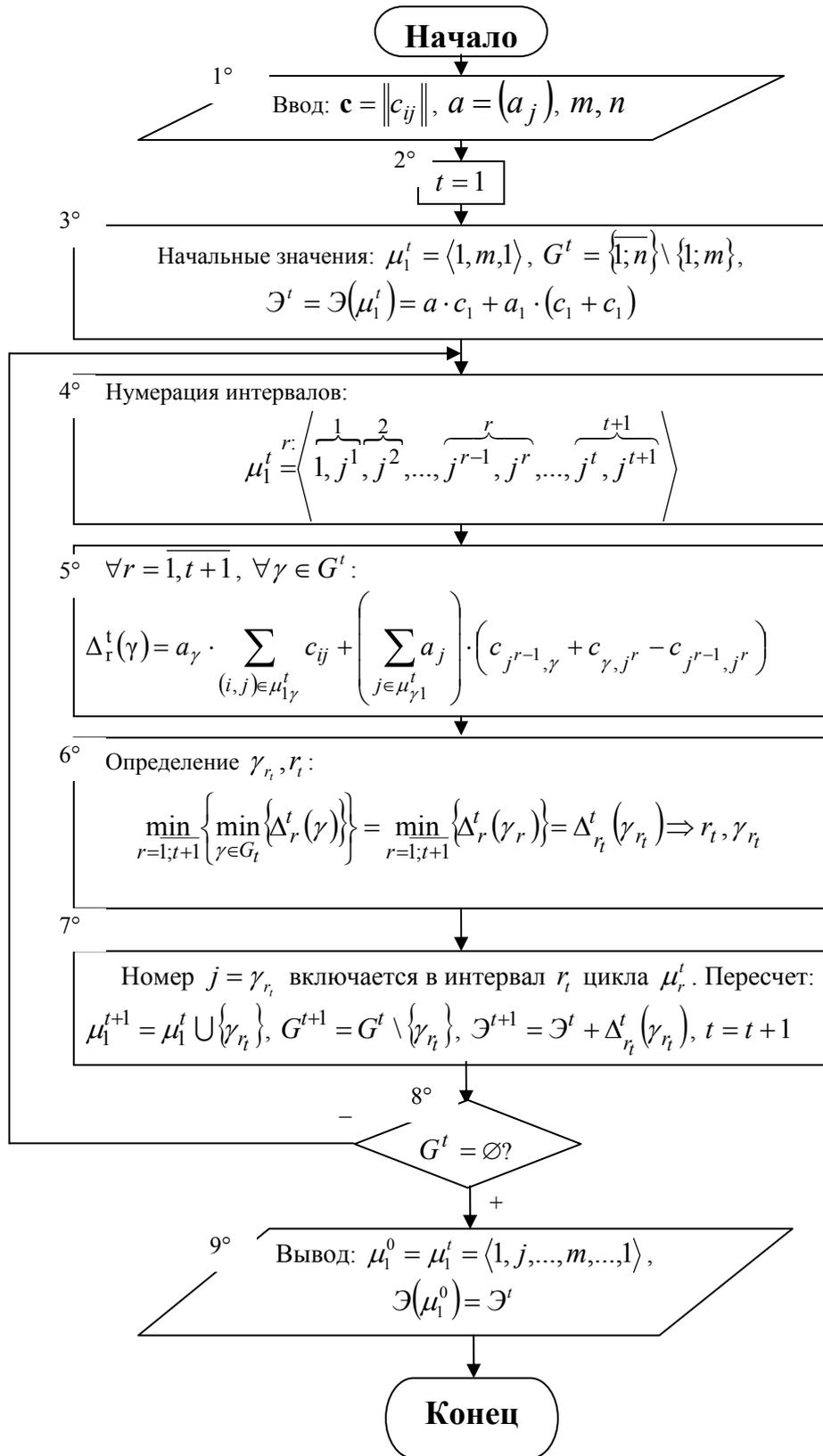


Рис. 4. Блок-схема алгоритма решения обобщенной задачи коммивояжера

Найденное методом расширения цикла решение на 12,4 % имеет большие энергозатраты, чем *оптимальное* решение μ_1^0 , полученное полным перебором всех N вариантов ($N = (n - 1)! = 4! = 24$):

$$\mu_1^0 = \langle 1, 4, 3, 2, 5, 1 \rangle, \quad \mathcal{E}(\mu_1^0) = \mathcal{E}\langle 1, 4, 3, 2, 5, 1 \rangle = 113. \quad (4.10)$$

Как и при решении классической задачи коммивояжера, решение, найденное методом расширения цикла, следует попытаться улучшить на основе проверки **первого необходимого условия оптимальности**. Действительно, анализ структуры решений (4.9), (4.10) показал, что выделенные в них жирным шрифтом элементы [см. формулу (4.11)] не являются минимальными ни в строках, ни в столбцах матрицы c (табл. 18):

$$\begin{aligned} L(\mu_1^{0\bar{0}}) &= \tilde{n}_{1,2} + c_{2,4} + c_{4,3} + \mathbf{c}_{3,5} + \mathbf{c}_{5,1} = 1 + 4 + 3 + \mathbf{21} + \mathbf{20} = 49, \\ L(\mu_1^0) &= c_{1,4} + c_{4,3} + c_{3,2} + \mathbf{c}_{2,5} + \tilde{n}_{5,1} = 3 + 3 + 4 + \mathbf{10} + \mathbf{20} = 40. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Следовательно, снимая жесткое ограничение *однократности прохода через каждый пункт*, длина некоторых участков цикла может быть уменьшена, что сократит и энергозатраты. В частности, решив задачу о кратчайшем пути (рис. 2), найдем:

$$\begin{aligned} L(\mu_{3,5}^0) &= L\langle 3, 2, 5 \rangle = c_{3,2} + c_{2,5} = 4 + 10 = 14 \quad (\text{вместо } c_{3,5} = 21), \\ L(\mu_{5,1}^0) &= L\langle 5, 2, 4, 1 \rangle = c_{5,2} + c_{2,4} + c_{4,1} = 2 + 4 + 5 = 11 \quad (\text{вместо } c_{5,2} = 20), \\ L(\mu_{2,5}^0) &= L\langle 2, 5 \rangle = c_{2,5} = 10. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Таким образом, с учётом (4.11), (4.12) **уменьшение** общей длины каждого из маршрутов в (4.11) будет соответственно равно:

$$\begin{aligned} \Delta L(\mu_1^{p\bar{c}}) &= (21 - 14) + (20 - 11) = 7 + 9 = 16, \\ \Delta L(\mu_1^0) &= (10 - 10) + (20 - 11) = 0 + 9 = 9. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Новые маршруты $\mu_1^{p\bar{c}'}$, $\mu_1^{0'}$ будут получены из (4.10) и (4.9) при замене в них участков $\langle 3; 5 \rangle$, $\langle 5; 1 \rangle$ соответственно на $\langle 3, 2, 5 \rangle$ и $\langle 5, 2, 4, 1 \rangle$:

$$\begin{aligned}\mu_1^{pu'} &= \langle 1, 2, 4, 3, 2, 5, 2, 4, 1 \rangle, \quad L(\mu_1^{pu'}) = 49 - 16 = 33, \\ \mu_1^0 &= \langle 1, 4, 3, 2, 5, 2, 4, 1 \rangle, \quad L(\mu_1^0) = 40 - 9 = 31.\end{aligned}\tag{4.14}$$

Примечание. Жирным шрифтом выделены номера «транзитных» пунктов, которые коммивояжер проходит транзитом, т.к. предназначенный для них груз уже оставлен в них при **первом** проходе.

При прочих неизменных условиях уменьшение энергозатрат, обусловленное уменьшением расстояния перевозки грузов $a_5 = 1$ и $a_1 = 1$ на 7 ед. (см. (4.13) для μ_1^{pu}) и груза $a_1 = 1$ – на 9 ед., согласно (4.7) равно:

$$\Delta \mathcal{E}^2 = \mathcal{E}(\mu_1^{pu}) = (a_5 + a_1)\delta_{3,5} + a_1\delta_{5,1} = (1+1) \cdot 7 + 1 \cdot 9 = 23.$$

$$\text{Аналогично} \quad \Delta \mathcal{E}^2(\mu_1^0) = a_1 \cdot \delta_{5,1} = 1 \cdot 9 = 9.\tag{4.15}$$

С учётом (4.10), (4.9) и (4.15) уменьшенные значения энергозатрат равны ¹:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\mu_1^{pu'}) &= \mathcal{E}(\mu_1^{pu}) - \Delta \mathcal{E}^2(\mu_1^{pu}) = 127 - 23 = 104, \\ \mathcal{E}(\mu_1^0') &= \mathcal{E}(\mu_1^0) - \Delta \mathcal{E}^2(\mu_1^0) = 113 - 9 = 104.\end{aligned}\tag{4.16}$$

Из (4.16) следует, что существуют, по крайней мере, два равнозначных по энергозатратам маршрута (4.14), однако различных по длине цикла.

Решение задачи коммивояжера может существенно отличаться от решения обобщенной задачи коммивояжера. Это обусловлено вектором грузов $\mathbf{a} = (a_j)_n$. Например, при рассмотренном векторе \mathbf{a} длина пути кратчайшего замкнутого маршрута и соответствующие ему энергозатраты соответственно равны:

$$L(\mu_1^0) = L\langle 1, 5, 2, 4, 3, 2, 4, 1 \rangle = 28, \quad \mathcal{E}(\mu_1^0) = 146,$$

что на 40 % больше минимальных энергозатрат (4.16).

¹ Энергозатраты для (4.14) могут быть вычислены непосредственно по формуле (4.10).

4.3. Модифицированный метод расширения цикла и решение обобщенной задачи коммивояжера

Модификация метода расширения цикла, как и ранее, будет состоять в том, что для включения номера $\gamma \in G^t$ в некоторый r -й интервал, при соединении γ с границами этого интервала будут **использоваться соответствующие кратчайшие маршруты**, получаемые на основе алгоритма эстафетного метода или заготовленные заранее. Особенность модифицированного метода расширения цикла состоит в том, что на каждом t -м шаге процесса в текущий цикл может быть включено более одного номера пунктов A_j из множества G^t , а следовательно, формулу приращения (4.8) при вычислении суммарного приращения придется применять подряд несколько раз, каждый раз используя при этом весь текущий цикл (все его элементы). Поэтому на каждом шаге будет удобнее применять не формулу приращений (4.8), а для каждого пробного варианта вычислять и сравнивать *полные энергозатраты*, найденные согласно (4.1). При сравнении пробных вариантов текущего цикла на каждом шаге процесса *критерия минимума приращения энергозатрат* уже будет недостаточно, так как он не учитывает количество элементов $n_r(\gamma)$ из множества G^t , которое войдет в r -й интервал вместе с *включаемым* элементом $\gamma \in G^t$ ¹. В качестве критерия, учитывающего указанный фактор, может быть использован показатель **удельных энергозатрат** $\varepsilon_r^t(\gamma)$, то есть **приращение средних затрат, приходящихся на один включенный в данный интервал $j^{r-1} \div j^r$ «нетранзитный» номер j** :

$$\varepsilon_r^t(\gamma) = \frac{\Delta_r^t(\gamma)}{n_r^t(\gamma)} = \frac{\mathcal{E}_r^t(\gamma) - \mathcal{E}_r^{t-1}}{n_r^t(\gamma)}, \quad \gamma \in G^t, \quad \forall r, \quad (4.17)$$

где \mathcal{E}_r^{t-1} , $\mathcal{E}_r^t(\gamma)$ – энергозатраты соответственно до и после включения элемента $\gamma \in G^t$ в интервал $(j^{r-1} \div j^r)$ текущего цикла μ_1^t ; $n_r^t(\gamma)$ – общее количество «нетранзитных» элементов $j \in G^t$, включаемое при этом в цикл μ_1^t .

Критерий (4.17) для выбора элемента γ_{r_t} , включаемого в r_t -й интервал текущего цикла μ_1^t , соответствует задаче минимизации **общих энергозатрат** $\mathcal{E}(\mu_1^0)$, которая эквивалентна задаче минимизации

¹ В $n_r^t(\gamma)$ не включаются «транзитные» элементы, т.е. номера тех пунктов, в которые груз уже доставлен при первом проходе.

удельных энергозатрат $\mathcal{E}(\mu_1^0)/n$ при $n = const$. Вычислительную схему проиллюстрируем на примере графа, заданного в табл. 18, что даёт возможность сравнить решение с решением, полученным ранее методом расширения цикла (4.16). Для удобства расчетов на основании табл. 18 вычислено и записано семейство кратчайших маршрутов (табл. 20), полученное эстафетным методом. Вычисления модифицированным методом и основные результаты представлены в табл. 21.

На первом шаге ($t = 1$) в качестве начального используется **нулевой цикл** $\mu_1^0 = \langle 1; 1 \rangle$, в единственный интервал которого поочередно вставляются элементы $\gamma \in G^1 = \{2, 3, 4, 5\}$, соединённые с границами интервала через кратчайшие маршруты, взятые из табл. 20. Например, пробный цикл $\mu_1^1(r, \gamma) = \mu_1^1(1; 3)$, записанный в графе 4 второй строки, получен путём включения в интервал $r = 1$ элемента $\gamma = 3$ с помощью двух кратчайших маршрутов, взятых из табл. 20:

$$\mu_1^1(1; 3) = \mu_{1,3}^0 \cup \mu_{3,1}^0 = \langle 1, 4, 3 \rangle \cup \langle 3, 2, 4, 1 \rangle = \langle 1, 4, 3, 2, 4, 1 \rangle. \quad (4.18)$$

Согласно 1-му выводу (раздел 2) любой частный подмаршрут, лежащий слева и справа от стыкующего элемента $\gamma = 3$, является *оптимальным* (кратчайшим), поэтому **неоптимальность возможна только в районе стыковки кратчайших маршрутов**. Действительно, обращаясь к табл. 20, видим, что стыковочный подмаршрут $\langle 4, 3, 2 \rangle$ не является оптимальным:

$$L\langle 4, 3, 2 \rangle = c_{4,3} + c_{3,2} = 3 + 4 = 7, \quad \text{но } L\langle 4, 1, 2 \rangle = 6 - \text{КМ.}$$

Таким образом, принудительное включение элемента $\gamma = 3$ в интервал $r = 1$ привело к увеличению длины маршрута. В полученном маршруте коммивояжер дважды пройдет пункт $j = 4$: при первом посещении в нём будет оставлен груз $a_4 = 3$ ед., второе посещение обусловлено необходимостью уменьшения длины текущего цикла μ_1^{t-1} (табл. 21; строка 2).

Для полученных в графе 4 пробных текущих циклов вычисляются энергозатраты (4.1), при этом удобно использовать вычислительную схему, иллюстрируемую на примере вычисления энергозатрат $\mathcal{E}_1^1(1; 3)$ (табл. 21; строка 2, графа 5).

¹ Первое посещение пункта именуется в дальнейшем *активным* («нетранзитным»), последующие – *транзитными*. Аналогично один и тот же пункт (или его номер) в первом случае именуется *активным*, в последующих – *транзитным*.

Таблица 20. Совмещенная матрица $\|\mu_{ij}^0/L_{ij}\|$

| $i \backslash j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|------------------|----------------------|-------------------|---------------------|-------------------|------------------------|
| 1 | | $\frac{1;2}{1}$ | $\frac{1,4,3}{6}$ | $\frac{1;4}{3}$ | $\frac{1;5}{6}$ |
| 2 | $\frac{2,4,1}{9}$ | | $\frac{2,4,3}{7}$ | $\frac{2,4}{4}$ | $\frac{2;5}{10}$ |
| 3 | $\frac{3,2,4,1}{13}$ | $\frac{3;2}{4}$ | | $\frac{3,2,4}{8}$ | $\frac{3,2,5}{14}$ |
| 4 | $\frac{4;1}{5}$ | $\frac{4,1,2}{6}$ | $\frac{4;3}{3}$ | | $\frac{4,1,5,4,5}{11}$ |
| 5 | $\frac{5,2,4,1}{11}$ | $\frac{5;2}{2}$ | $\frac{5,2,4,3}{9}$ | $\frac{5,2,4}{6}$ | |

$$(a_j) = (1, 2, 4, 3, 1)$$

Таблица 21

| $t=1, G^1 = \{2,3,4,5\}, \mu_1^0(\gamma) = \langle 1;1 \rangle, \mathfrak{D}_1^0 = 0$ | | | | | | | |
|--|---|----------|----------------|------------------------------|--|-----------------|---|
| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| | r | γ | $j^{r-1}; j^r$ | $\mu_1^t(r, \gamma)$ | $\mathfrak{D}_1^t(r, \gamma) / \mathfrak{D}_1^u$ | $n_r^t(\gamma)$ | $\varepsilon_r^t(\gamma) / \varepsilon_r^u$ |
| 1 | 1 | 2 | 1;1 | 1,2,4,1 | 27 / - | 2 | 13,5 / - |
| 2 | 1 | 3 | 1;1 | 1,4,3,2,4,1 | 72 / - | 3 | 24,0 / - |
| 3 | 1 | 4 | 1;1 | 1,4,1 | 17 / - | 1 | 17,0 / - |
| 4 | 1 | 5 | 1;1 | 1,5,2,4,1 | 75 / - | 3 | 25,0 / - |
| $t=2, G^2 = \{3;5\}, \mu_1^1(1;2) = \langle 1,2,4,1 \rangle, \mathfrak{D}_1^1(1;2) = 27$ | | | | | | | |
| 5 | 1 | 3 | 1;2 | 1,4,3,2,4,1 | 75 / - | 1 | 48,0 / - |
| 6 | 1 | 5 | 1;2 | 1,5,2,4,1 | 75 / - | 1 | 48,0 / - |
| 7 | 2 | 3 | 2;4 | 1, $\dot{2}$, 4, 2, 4, 1 | 70 / 75 | 1 | 43,0 / - |
| 8 | 2 | 5 | 2;4 | 1, $\dot{2}$, 5, 2, 4, 1 | 86 / 75 | 1 | 59,0 / 48 |
| 9 | 3 | 3 | 4;1 | 1, $\dot{2}$, 4, 3, 2, 4, 1 | 70 / 72 | 1 | 43,0 / - |
| 10 | 3 | 5 | 4;1 | 1, $\dot{2}$, 4, 5, 2, 4, 1 | 60 / 86 | 1 | 33,0 / - |

| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|-----|-----------------------------------|-----------|---|------------------|
| $t = 3, G^3 = \{3\}, \mu_1^2(3;2) = \langle 1,2,4,5,2,4,1 \rangle, \mathcal{E}_1^2(3;5) = 60$ | | | | | | | |
| 11 | 1 | 3 | 1;2 | $1,4,3,2,\dot{4},5,2,4,1$ | 114 / 104 | 1 | 54,0 / 44 |
| 12 | 2 | 3 | 2;4 | $1,\dot{2},4,3,2,\dot{4},5,2,4,1$ | 114 / 104 | 1 | 54,0 / 44 |
| 13 | 3 | 3 | 4;5 | $1,\dot{2},4,3,2,5,2,4,1$ | 104 / 104 | 1 | 44,0 / 44 |
| 14 | 4 | 3 | 5;2 | $1,\dot{2},4,5,2,4,3,2,4,1$ | 171 / 183 | 1 | 111,0 / - |
| 15 | 5 | 3 | 2;4 | $1,\dot{2},4,5,2,4,3,2,4,1$ | 171 / 183 | 1 | 111,0 / - |
| 16 | 6 | 3 | 4;1 | $1,\dot{2},4,5,2,4,3,2,4,1$ | 171 / 183 | 1 | 111,0 / - |
| $t = 4, G^4 = \emptyset, \mu_1^3 = \langle 1,\dot{2},4,3,2,5,2,4,1 \rangle, \mathcal{E}_1^3 = 104, L(\mu_1^3) = 33$ | | | | | | | |

Вначале записывается цикл $\mu_1^1(1;3)$, под каждым элементом цикла пишется значение доставляемого груза a_j (под «транзитными» номерами ставятся нули); под элементами a_j записываются длины маршрутов, вычисленные согласно (4.4) или по рекуррентной формуле

$$L_{1,j} = L_{1,i} + c_{ij}, \quad \forall j \neq 1.$$

Для указанного примера имеем

$$\begin{aligned} \mu_1^1(1;3) &= \langle 1, 4, 3, 2, 4, 1 \rangle, \\ a_j &: 3, 4, 2, 0, 1, \\ L_{1,j} &: 3, 6, 10, 14, 19, \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_1^1(1;3) = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 2 \cdot 10 + 0 \cdot 14 + 1 \cdot 19 = 72.$$

Количество активных элементов, вошедших в текущий цикл, равно трём (транзитный элемент $j = 4$ **не учитывается** – табл. 21, графа б).

Удельные энергозатраты согласно (4.17) равны:

$$\varepsilon_1^1(3) = \frac{\mathcal{E}_1^1(1;3) - \mathcal{E}_1^0}{n_1^1(3)} = \frac{72 - 0}{3} = 24.$$

Аналогично вычисляются остальные элементы строк 1 – 4¹.

¹ Величины $\dot{\gamma}_r^e$ и ε_r^u (соответствующие исправленные их значения) пока не требуются.

Так как минимальным является элемент $\varepsilon_1^1(2) = 1,3,5$, то соответствующий ему цикл является **начальным для второго шага процесса**. Не включенными в цикл остаются номера:

$$G^2 = G^1 \setminus \{2;4\} = \{2,3,4,5\} \setminus \{2;4\} = \{3;5\}.$$

После двух последующих шагов процесса к шагу $t = 4$ получено одно из решений (4.14). Поскольку все n активных элементов вошли в цикл ($G^4 = \emptyset$), то процесс оканчивается, однако при этом одно из решений (4.14) было утеряно.

Чтобы найти утерянное решение, необходимо попытаться улучшить полученные на шаге $t = 3$ пробные циклы. Для их улучшения на основе анализа вычислительной схемы модифицированного метода расширения цикла (табл. 21) проверим **второе необходимое условие оптимальности** и его выполнение.

Ранее полученное условие – любая пара смежных индексов полученного решения должна являться кратчайшим маршрутом (см. раздел 2, вывод 1) – автоматически выполняется при модифицированном методе расширения цикла. При улучшении решения на основе указанного требования пришлось отказаться от жесткого условия об *однократном* включении в решение каждого из n элементов. Однако принудительное включение элементов в текущий цикл, как правило, нарушает оптимальность текущего цикла **в местах стыковки кратчайших маршрутов** [см. формулу (4.18)]. Восстановить оптимальность или, по крайней мере, улучшить решение можно в ряде случаев путём **изъятия некоторых элементов** из цикла. Таким образом, появляется **новое необходимое условие оптимальности решения обобщенной задачи: если изъятие элемента из решения не уменьшает энергозатраты, то оно необходимо**.

Проверка этого условия поочередным пробным удалением каждого элемента – довольно громоздкая процедура, однако количество вычислений уменьшается, если наложить два дополнительных условия:

- удаление элемента **не должно уменьшать количество активных элементов** в цикле;
- удаление элемента **не должно увеличивать длину цикла** (а значит, и энергозатраты).

Из первого условия следует, что проверке подвергаются только транзитные элементы и совпадающие с ними номера активных элементов. Из второго условия следует, что если проверяемый элемент не нарушает структуру кратчайшего маршрута, то его не следует удалять из цикла. Проиллюстрируем сказанное на примере.

Первый транзитный элемент появился на шаге $t = 1$

(табл. 21; строка 2, жирный шрифт). Однако участки $\langle 1,4,3 \rangle$ и $\langle 2,4,1 \rangle$ – это кратчайшие маршруты (см. табл. 20), поэтому удаление любого элемента $j=4$ удлинит цикл и увеличит энергозатраты. Вычислять новые (исправленные \mathcal{E}_1'') значения энергозатрат и величины ε_1'' не имеет смысла (прочерки в строке 2).

Иная ситуация имеет место в строке 9 табл. 21. Выделим участки маршрута с элементами 2 и 4 и сравним их с соответствующими кратчайшими маршрутами:

$$\begin{aligned} \langle 1, \dot{2}, 4 \rangle, \langle 3, 2, 4 \rangle, \langle 2, 4, 3 \rangle, \langle 2, 4, 1 \rangle, & \quad (\text{табл. 21}), \\ KM : \langle 1; 4 \rangle, \langle 3, 2, 4 \rangle, \langle 2, 4, 3 \rangle, \langle 2, 4, 1 \rangle, & \quad (\text{табл. 20}). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Из (4.19) видно, что только активный элемент $j=2$ нарушает структуру кратчайшего маршрута $\langle 1; 4 \rangle$, а следовательно, проверке подлежит только элемент 2, отмеченный точкой. Изъятие этого элемента уменьшит длину маршрута на 2 ед., однако сам активный элемент переместится со второй позиции на пятую. Это увеличит энергозатраты больше, чем они уменьшатся за счёт сокращения длины пути к другим пунктам (табл. 21; графа 5, строка 9, с 70 до 72). Следовательно, удалять активный элемент $j = \dot{2}$ нецелесообразно.

Таким путём в строках 11, 12 табл. 21 найдено утерянное решение. Однако если рассматривать задачу как двухкритериальную (\mathcal{E} и L) и из всех эквивалентных по энергозатратам решений выбрать решение с минимальной длиной цикла, то все три решения (табл. 21; строки 11 – 13), получаемые путём изъятия элементов, отмеченных точкой сверху, (и оба решения (4.14)) сводятся к одному решению:

$$\mathcal{E}(\mu_1^0) = \mathcal{E}\langle 1, 4, 3, 2, 5, 2, 4, 1 \rangle = 104, \quad L\langle \mu_1^0 \rangle = 31.$$

Модифицированный метод расширения цикла в сочетании с проверкой и корректировкой стыковочных участков цикла позволяет получить если не оптимальное, то близкое к нему решение.

Однако основным достоинством модифицированного метода расширения цикла является возможность получить решение обобщенной задачи коммивояжера при **неполной матрице расстояний** с ($\varphi < 1$). Порядок решения проиллюстрируем на примере графа, представленного на рис. 1.

В табл. 22 (переписанная табл. 1), отражающей граф в матричной форме, представлена исходная информация. Вектор грузов записан под

табл. 22 (для удобства вычислений принято $a_j = j \quad \forall j$, что, однако, не снижает общности рассмотрения). Семейство кратчайших маршрутов и их длин, вычисленное эстафетным методом (раздел 2), записано в табл. 23. Процесс решения модифицированным методом расширения цикла, промежуточные данные и результаты решения представлены в табл. 24.

На первом шаге транзитных элементов не появилось, и проводить дополнительных проверок не потребовалось. Вариант, помещенный в строке 2, потребовал минимальных удельных энергозатрат ($\varepsilon_1(3) = 28,3$) и явился исходным для шага $t = 2$ (табл. 24).

На втором шаге появились транзитные элементы. Все проверяемые элементы оказались элементами кратчайших маршрутов, поэтому дополнительных проверок не потребовалось (прочерки в графах 5, 7).

На шаге $t = 3$ оказалось, что участки $\langle 6,2,3 \rangle$ (строки 14, 15) и $\langle 6, \overset{\cdot}{2}, 3 \rangle$ (строки 17, 18) не являются кратчайшими маршрутами (табл. 23). Изъятие средних элементов (2 и $\overset{\cdot}{2}$) из соответствующих маршрутов привело к уменьшению энергозатрат, значения которых записаны в указанных строках рубрики 5.

Все элементы вошли в цикл ($G^4 = \emptyset$) – процесс окончен. Полученное решение μ_1^3 улучшить какими-либо способами не удалось, соответствующий ему маршрут проходит через указанные пункты (рис. 1).

4.4. Решение обобщенной задачи коммивояжера методом последовательного наращивания цикла

Анализ процесса решения модифицированным методом расширения цикла подводит к выводу: использование таблицы кратчайших маршрутов (табл. 23) при формировании цикла приводит к тому, что получаемое решение (цикл) по существу является *сочленением некоторой упорядоченной совокупности кратчайших маршрутов*. Действительно, для полученного в табл. 24 решения имеем

$$\mu_1^0 = (1,4,6,3,4,5,2,3,1) = (1,4,6) \cup (6,3,4,5) \cup (5;2) \cup (2,3,1). \quad (4.20)$$

Сочленяемые маршруты (табл. 23) являются кратчайшими. Возникает вопрос: нельзя ли, не прибегая к довольно громоздкому модифицированному методу расширения цикла, непосредственно с помощью табл. 23 построить цикл путем его *последовательного наращивания* некоторыми кратчайшими маршрутами? Каким принципом следует руководствоваться при выборе сочленяемых маршрутов и

определении последовательности их соединения? Один из возможных ответов на этот вопрос можно получить на основе анализа структуры решения (4.20) в сочетании с вектором веса доставляемых грузов $(a_j)_n$, (табл. 22).

Из (4.20) видно, что стыкующие элементы $(6,5,2)$ сочленяемых кратчайших маршрутов расположены **в порядке убывания веса грузов**. Физически это означает, что самый тяжелый груз ($a_6 = 6$) первым доставляется по кратчайшему маршруту $\langle 1,4,6 \rangle$, т.е. с **минимальными энергозатратами**. Так как любой его участок также является кратчайшим маршрутом (раздел 2, 1-й вывод), то, следовательно, *попутно* и с минимальными энергозатратами доставляется и груз $a_4 = 4$. Разумно предположить, что самый тяжелый из оставшихся грузов ($a_5 = 5$) также следует *направить* из пункта A_6 в A_5 по кратчайшему маршруту $\langle 6,3,4,5 \rangle$ (табл. 23), при этом *попутно* и снова по кратчайшему маршруту доставляется очередной (по весу) груз $a_3 = 3$. Следующий (по весу) груз ($a_2 = 2$) также отправляется по кратчайшему маршруту $\langle 5;2 \rangle$ (табл. 23) и затем по $\langle 2,3,1 \rangle$ ($a_1 = 1$). Соединение этих кратчайших маршрутов и образует решение (4.20).

Таблица 22. $\|c_{ij}\|$, $\varphi = 1$

| $i \backslash j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|----|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | 3 | 6 | 8 |
| 2 | 13 | | 6 | | | |
| 3 | 5 | | | 3 | | |
| 4 | | | | | 3 | 2 |
| 5 | | 6 | | | | |
| 6 | | 4 | 3 | | | |

$$(a_j) = (1; 2; 3; 4; 5; 6)$$

Таблица 23. Совмещённая матрица $\left\| \frac{\mu_{ij}^0}{L_{ij}} \right\|$

| $i \backslash j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|----------------------|---------------------|---------------------|----------------------|-----------------------|------------------------|
| 1 | | $\frac{1,4,6,2}{9}$ | $\frac{1,4,6,3}{8}$ | $\frac{1;4}{3}$ | $\frac{1,5,1,4,5}{6}$ | $\frac{1,4,6}{5}$ |
| 2 | $\frac{2,3,1}{11}$ | | $\frac{2;3}{6}$ | $\frac{2,3,4}{9}$ | $\frac{2,3,4,5}{12}$ | $\frac{2,3,4,6}{11}$ |
| 3 | $\frac{3;1}{5}$ | $\frac{3,4,6,2}{9}$ | | $\frac{3;4}{3}$ | $\frac{3,4,5}{6}$ | $\frac{3,4,6}{5}$ |
| 4 | $\frac{4,6,3,1}{10}$ | $\frac{4,6,2}{6}$ | $\frac{4,6,3}{5}$ | | $\frac{4;5}{3}$ | $\frac{4;6}{2}$ |
| 5 | $\frac{5,2,3,1}{17}$ | $\frac{5;2}{6}$ | $\frac{5,2,3}{12}$ | $\frac{5,2,3,4}{15}$ | | $\frac{5,2,3,4,6}{17}$ |
| 6 | $\frac{6,3,1}{8}$ | $\frac{6;2}{4}$ | $\frac{6;3}{3}$ | $\frac{6,3,4}{6}$ | $\frac{6,3,4,5}{9}$ | |

Из вышеизложенного следует основная идея, составляющая основу предлагаемого метода: расположить номера пунктов **в порядке убывания веса грузов** a_j , требующих доставки, и в соответствии с этой последовательностью формировать (наращивать) цикл путем объединения кратчайших маршрутов, получаемых из таблицы для этих маршрутов. Однако если разбиение любого кратчайшего маршрута всегда образует некоторое множество кратчайших маршрутов, то объединение множества кратчайших маршрутов может привести к появлению участков, не имеющих наименьшую длину. Появление таких участков согласно 1-му выводу (раздел 2) возможно только *в местах соединения* кратчайших маршрутов. Так, например, не все участки маршрутов в точках соединения 6, 5, 2 будут кратчайшими:

$$\langle 4,6,3 \rangle \quad \langle 4,5,2 \rangle \quad \langle 5,2,3 \rangle \text{ [см. формулу (4.20)],}$$

$$\text{КМ: } \langle 4,6,3 \rangle \quad \langle 4,6,2 \rangle \quad \langle 5,2,3 \rangle \text{ (табл. 23).}$$

Маршрут $\langle 4,5,2 \rangle$ не является кратчайшим, однако заменить в $\langle 4,5,2 \rangle$ средний элемент на $j = 6$ или просто исключить его невозможно. В первом случае нарушается дополнительное условие (элемент $j = 5$ не войдет в цикл), во втором – «исправленный» маршрут $\langle 4;2 \rangle$ просто невозможен (табл. 22). Возможность последовательного формирования цикла

указанным способом (по убыванию веса a_j) требует более тщательной проверки.

Применим указанный принцип формирования цикла для случая полной ($\varphi=1$) матрицы расстояний (табл. 18).

Таблица 24

| $t=1, G^1 = \{2,3,4,5,6\}, \mu_1^0 = \langle 1;1 \rangle, \mathfrak{A}_1^1 = 0$ | | | | | | | |
|---|---|----------|----------------|-----------------------|--|-----------------|---|
| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| | r | γ | $j^{r-1}; j^r$ | $\mu_1^t(r, \gamma)$ | $\mathfrak{A}_1^t(r, \gamma) / \mathfrak{A}_1^u$ | $n_r^t(\gamma)$ | $\varepsilon_r^t(\gamma) / \varepsilon_r^u$ |
| 1 | 1 | 2 | 1;1 | 1,4,6,2,3,1 | 125 / - | 4 | 31,3 / - |
| 2 | 1 | 3 | 1;1 | 1,4,6,3,1 | 79 / - | 3 | 28,3 / - |
| 3 | 1 | 4 | 1;1 | 1,4,6,3,1 | 79 / - | 3 | 28,3 / - |
| 4 | 1 | 5 | 1;1 | 1,4,5,2,3,1 | 143 / - | 4 | 35,8 / - |
| 5 | 1 | 6 | 1;1 | 1,4,6,3,1 | 79 / - | 3 | 28,3 / - |
| $t=2, G^2 = \{2;5\}, \mu_1^1 = \langle 1,4,6,3,1 \rangle, \mathfrak{A}_1^2(1;3) = 79$ | | | | | | | |
| 6 | 1 | 2 | 1;4 | 1,4,6,2,3,1,4,6,3,1 | 133 / - | 1 | 54 / - |
| 7 | 1 | 5 | 1;4 | 1,4,5,2,3,1,4,6,3,1 | 289 / - | 2 | 105 / - |
| 8 | 2 | 2 | 4;6 | 1,4,6,2,3,4,6,3,1 | 133 / - | 1 | 54 / - |
| 9 | 2 | 5 | 4;6 | 1,4,5,2,3,1,4,6,3,1 | 289 / - | 2 | 105 / - |
| 10 | 3 | 2 | 6;3 | 1,4,6,2,3,1 | 125 / - | 1 | 46 / - |
| 11 | 3 | 5 | 6;3 | 1,4,6,3,1,4,5,2,3,1 | 207 / - | 2 | 64 / - |
| 12 | 4 | 2 | 3;1 | 1,4,6,3,1,4,6,2,3,1 | 128 / - | 1 | 49 / - |
| 13 | 4 | 5 | 3;1 | 1,4,6,3,1,4,5,2,3,1 | 207 / - | 2 | 64 / - |
| $t=3, G^3 = \{5\}, \mu_1^2(3;2) = \langle 1,4,6,2,3,1 \rangle, \mathfrak{A}_1 = 125$ | | | | | | | |
| 14 | 1 | 5 | 1;4 | 1,4,5,2,3,1,4,6,2,3,1 | 296 / 289 | 1 | 171 / 164 |
| 15 | 2 | 5 | 4;6 | 1,4,5,2,3,1,4,6,2,3,1 | 296 / 289 | 1 | 171 / 164 |
| 16 | 3 | 5 | 6;2 | 1,4,6,3,4,5,2,3,1 | 207 / - | 1 | 82 / - |
| 17 | 4 | 5 | 2;3 | 1,4,6,2,3,1,4,5,2,3,1 | 248 / 207 | 1 | 123 / 82 |
| 18 | 5 | 5 | 3;1 | 1,4,6,2,3,4,5,2,3,1 | 248 / 207 | 1 | 123 / 82 |
| $t=4, G^4 = \emptyset, \mu_1^0 = \mu_1^3 = \langle 1,4,6,3,4,5,2,3,1 \rangle, \mathfrak{A}_1(\mu_1^0) = 207, L(\mu_1^0) = 31$ | | | | | | | |

Упорядочим номера j пунктов A_j по убыванию веса доставляемых грузов a_j :

(j): 3, 4, 2, 5, 1.

(a_j): 4, 3, 2, 1, 1.

В соответствии с полученной упорядоченной последовательностью (j) , по табл. 20¹ находится первый кратчайший маршрут (исходный пункт $k = 1$):

$$\mu_{1,3}^0 = \langle 1,4,3 \rangle. \quad (4.21)$$

Из (4.21) видно, что *попутно и по кратчайшему маршруту* будет доставлен груз $a_4 = 3$ ед. в пункт A_4 . Следовательно, в соответствии с установленной последовательностью (j) очередной груз из пункта A_3 [см. формулу (4.21)] следует доставить в пункт A_2 . Соответствующий кратчайший маршрут $\mu_{3,2}^0$ определяется из табл. 20: $\mu_{3,2}^0 = \langle 3;2 \rangle$.

Соединение двух кратчайших маршрутов позволяет записать начальную часть цикла, найденную за два шага процесса:

$$\mu_{1,2} = \mu_{1,3}^0 \cup \mu_{3,2}^0 = \langle 1,4,3 \rangle \cup \langle 3;2 \rangle = \langle 1,4,3,2 \rangle. \quad (4.22)$$

Два других кратчайших маршрута, также найденные по табл. 20 ($\mu_{2,5}^0 = \langle 2;5 \rangle$, $\mu_{5,1}^0 = \langle 5,2,4,1 \rangle$), в соединении с (4.22) образуют цикл, который и является решением задачи:

$$\mu_1^0 = \langle 1,4,3,2 \rangle \cup \langle 2;5 \rangle \cup \langle 5,2,4,1 \rangle = \langle 1,4,3,2,5,2,4,1 \rangle. \quad (4.23)$$

Такое же решение было получено модифицированным методом расширения цикла (табл. 21 и (4.14)).

Примечание. По табл. 20 можно убедиться, что решение (4.23) удовлетворяет обоим *необходимым условиям оптимальности*: любая смежная пара элементов образует кратчайший маршрут; любой из *повторяющихся* элементов совместно со смежными также образует кратчайший маршрут.

Подтверждение эффективности принципа убывания веса на двух рассмотренных примерах не может являться достаточным условием для утверждения о его справедливости в *общем случае*. Более того, удалось сформулировать такой пример, при котором указанное правило приводит к явно неоптимальному решению. Такой контрпример представлен графом

¹ Табл. 20 построена на основании табл. 18 (эстафетный метод).

на рис. 5¹ (табл. 25). Действительно, не выгодно (в смысле энергозатрат) все грузы вести в пункт A_3 , куда должен быть доставлен самый большой груз ($a_3 = 6$), а затем снова *возвращаться* в пункт A_1 для доставки остальных грузов. Без специальных расчетов видно, что оптимальный замкнутый маршрут из пункта A_1 проходит по жирной ломаной линии, при этом *попутно* доставляются грузы в пункты A_2 , A_5 , A_4 а из пункта A_3 транспорт возвращается в пункт A_1 порожний («везет» пассивный груз $a_1 = 1$). Таким образом, оптимальным гамильтоновым циклом, минимизирующим энергозатраты, будет являться замкнутый маршрут

$$\mu_1^0 = \langle 1, 2, 5, 4, 3, 1 \rangle. \quad (4.24)$$

Первое необходимое условие оптимальности в (4.24) выполнено, что следует из сравнения пар элементов в (4.24) с соответствующими элементами табл. 26. В проверке второго необходимого условия оптимальности не возникает необходимости, поскольку в (4.24) нет повторяющихся элементов (кроме начального). Согласно (4.1) для полученного решения (4.24) и данных, приведенных на графе (рис. 5), энергозатраты минимальны и равны:

$$\mathcal{E}(\mu_1^0) = \langle 1, 2, 5, 4, 3, 1 \rangle = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 9 + 1 \cdot 16 = 120 = \mathcal{E}_{\min}. \quad (4.25)$$

Найдем решение, используя принцип *убывания веса грузов*, для чего граф (рис. 5) запишем в матричной форме (табл. 25) и эстафетным методом (раздел 2) вычислим полное семейство кратчайших маршрутов и их длин (табл. 26). **Упорядочим номера пунктов по убыванию веса грузов a_j :**

$$\begin{aligned} (j): & 3, 4, 5, 2, 1, \\ (a_j): & 6, 5, 4, 2, 1. \end{aligned}$$

Наиболее тяжелый груз $a_3 = 6$ доставляется в пункт A_3 по кратчайшему маршруту $\langle 1; 3 \rangle$ (табл. 26); из пункта A_3 в пункт A_4 груз $a_5 = 4$ направляется по маршруту $\langle 3; 4 \rangle$ (табл. 26) и т.д., что, в конечном счете, приведет к решению:

$$\mu_1 = \langle 1; 3 \rangle \cup \langle 3; 4 \rangle \cup \langle 4, 1, 2, 5 \rangle \cup \langle 5, 4, 1 \rangle = \langle 1, 3, 4, 1, 2, 5, 4, 1 \rangle. \quad (4.26)$$

¹ Участки дорог, по которым движение возможно только в одном направлении, указаны направленными (ориентированными) дугами (стрелки).

Таблица 25. $\|c_{ij}\|$

| $i \backslash j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|------------------|---|---|---|---|---|
| 1 | | 2 | 7 | | 4 |
| 2 | | | 6 | 4 | 2 |
| 3 | 7 | 6 | | 3 | |
| 4 | 6 | | 3 | | |
| 5 | | | 4 | 2 | |

a_j : 1 2 6 5 4

Матрица расстояний и вектор грузов a_j

Таблица 26. Совмещенная матрица $\left\| \begin{array}{c} \mu_{kj}^0 \\ L_{kj}^0 \end{array} \right\|$

| $k \backslash j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|------------------|----------------------|--------------------|-----------------|---------------------|-------------------------|
| 1 | | $\frac{1;2}{2}$ | $\frac{1;3}{7}$ | $\frac{1,2,5,4}{8}$ | $\frac{1,2,5,(1,5)}{4}$ |
| 2 | $\frac{2,5,4,1}{10}$ | | $\frac{2;3}{6}$ | $\frac{2,5,4}{4}$ | $\frac{2;5}{2}$ |
| 3 | $\frac{3;1}{7}$ | $\frac{3;2}{6}$ | | $\frac{3;4}{3}$ | $\frac{3,2,5}{8}$ |
| 4 | $\frac{4;1}{6}$ | $\frac{4,1,2}{8}$ | $\frac{4;3}{3}$ | | $\frac{4,1,2,5}{10}$ |
| 5 | $\frac{5,4,1}{8}$ | $\frac{5,3,2}{10}$ | $\frac{5;3}{4}$ | $\frac{5;4}{2}$ | |

Рис. 5. Граф дорожной сети

Улучшить решение на основе двух известных необходимых условий оптимальности невозможно: первое условие выполнено по построению, второе условие не выполнено только для тройки $\langle 3,4,1 \rangle$, однако замена ее на оптимальный участок $\langle 3;1 \rangle$ приведет к увеличению энергозатрат (из-за смещения активного элемента $j=4$ с третьей позиции на седьмую). Энергозатраты, соответствующие полученному решению, согласно (4.1) равны (*транзитные* элементы, выделенные жирным шрифтом в (4.26), игнорируются):

$$\mathcal{E}(\mu_1) = 6 \cdot 7 + 5 \cdot 10 + 2 \cdot 18 + 4 \cdot 20 + 1 \cdot 28 = 236.$$

По сравнению с (4.25) энергозатраты увеличились, а следовательно, метод наращивания цикла по убыванию веса не является общим, и от него следует отказаться, несмотря на то, что он весьма эффективен в вычислительном плане.

В связи с рассмотренным специально подобранным примером, позволившем отказаться от ложной гипотезы, возникает вопрос: не явится ли этот пример непосильным и для модифицированного метода расширения цикла? Используя те же табл. 25, 26, найдем решение упомянутым методом.

На первом шаге ($t=1$) поочередно в нулевой интервал $\langle 1;1 \rangle$ включается каждый из элементов множества G^1 . Порядок расчетов и запись промежуточной информации (табл. 27) ведутся так же, как и в табл. 21. Например, элемент $\gamma = 2 \in G^1$ включается в интервал $\langle 1;1 \rangle$ посредством двух кратчайших маршрутов, взятых из табл. 26, что и записано в графе 4 первой строки табл. 27.

$$\langle 1; \mathbf{2} \rangle \cup \langle \mathbf{2}, 5, 4, 1 \rangle = \langle 1, \mathbf{2}, 5, 4, 1 \rangle.$$

На втором шаге получено оптимальное решение (табл. 27, строка 8), при этом даже не потребовалось заполнять графу 7, поскольку при равенстве количеств активных элементов ($\forall \gamma: n_r^2(\gamma) = 1$ – графа 6) упорядоченность по $\varepsilon_r^2(\gamma)$ совпадает с упорядоченностью по $\mathcal{E}_1^2(r, \gamma)$, что следует из (4.17).

| $t = 1, G^1 = \{2,3,4,5\}, \mu_1^H(\gamma) = \langle 1;1 \rangle, \mathcal{E}_1^H = 0$ | | | | | | | |
|---|---|----------|----------------|----------------------|--|-----------------|---|
| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| | r | γ | j^{r-1}, j^r | $\mu_1^t(r, \gamma)$ | $\mathcal{E}_1^t(r, \gamma) / \mathcal{E}_1^u$ | $n_r^t(\gamma)$ | $\varepsilon_r^t(\gamma) / \varepsilon_r^u$ |
| 1 | 1 | 2 | 1;1 | 1,2,5,4,1 | 62 / - | 3 | 20,7 / - |
| 2 | 1 | 3 | 1;1 | 1,3,1 | 56 / - | 1 | 56,0 / - |
| 3 | 1 | 4 | 1;1 | 1,2,5,4,1 | 62 / - | 3 | 20,7 / - |
| 4 | 1 | 5 | 1;1 | 1,2,5,4,1 | 62 / - | 3 | 20,7 / - |
| $t = 2, G^2 = \{3\}, \mu_1^1 = \langle 1,2,5,4,1 \rangle, \mathcal{E}^1(1;2) = 62$ | | | | | | | |
| 5 | 1 | 3 | 1;2 | 1,3,2,5,4,1 | 234 / - | 1 | - |
| 6 | 1 | 3 | 2;5 | 1,2,3,2,5,4,1 | 206 / - | 1 | - |
| 7 | 2 | 3 | 5;4 | 1,2,5,3,4,1 | 140 / - | 1 | - |
| 8 | 4 | 3 | 4;1 | 1,2,5,4,3,1 | 120 / - | 1 | - |
| $t = 3, G^3 = \emptyset, \mu_1^2 = \langle 1,2,5,4,3,1 \rangle, \mathcal{E}(\mu_1^2) = 120$ | | | | | | | |

Сравнение и анализ двух методов, приводящих к решениям (4.25), (4.26), позволяют предложить *комбинированный метод*, сохраняющий преимущества каждого из этих методов. От метода расширения цикла целесообразно заимствовать критерий удельных энергозатрат ε_{ij} , который определит выбор очередного кратчайшего маршрута, присоединяемого к циклу, а от второго – принцип построения цикла (его наращивания).

Суть метода последовательного наращивания цикла будет состоять в последовательном подсоединении кратчайших маршрутов в соответствии с принципом нарастания удельных энергозатрат ε_{ij} :

$$\varepsilon_{ij}^t = \mathcal{E}_{ij}^t / n_{i,j}^t,$$

где i – конечный элемент *текущего* (наращиваемого) маршрута $\mu_{1,i}$; j – конечный элемент *подсоединяемого* кратчайшего маршрута $\mu_{i,j}$; $\mathcal{E}_{i,j}^t$ – энергозатраты на маршруте $\mu_{i,j}^t$ – (4.1); $n_{i,j}^t$ – число активных элементов подсоединяемого кратчайшего маршрута $\mu_{i,j}^t$.

Для построения полного цикла рассматриваемым методом удобно предварительно заготовить *совмещенную матрицу*, включающую в себя элементы трех матриц: $\mu_{i,j}^0, \mathcal{E}(\mu_{i,j}^0), \varepsilon(\mu_{i,j}^0)$. Такая матрица представлена в табл. 29, при этом, если маршрут неоднозначен, то записывается тот, в

котором содержится большее число активных элементов ($\mu_{1,5}^0$, табл. 26, 29). Найдем решение той же задачи (рис 5; табл. 28) методом наращивания цикла.

Таблица 28. $\|c_{ij}\|$

| $i \backslash j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|------------------|---|---|---|---|---|
| 1 | | 2 | 7 | | 4 |
| 2 | | | 6 | 4 | 2 |
| 3 | 7 | 6 | | 3 | |
| 4 | 6 | | 3 | | |
| 5 | | | 4 | 2 | |

$a_j: \quad 1 \quad 2 \quad 6 \quad 5 \quad 4$

Матрица расстояний и вектор грузов a_j

Таблица 29. $\left\| \frac{\mu_{ij}^0}{\mathcal{E}_{ij} - \varepsilon_{ij}} \right\|$

| $i \backslash j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|------------------|-------------------------|-----------------------|---------------------|---------------------------|-----------------------------|
| 1 | | $\frac{1;2}{4-4}$ | $\frac{1;3}{42-42}$ | $\frac{1,2,5,4}{50-16,7}$ | $\frac{1,2,5,(1,5)}{20-10}$ |
| 2 | $\frac{2,5,4,1}{30-10}$ | | $\frac{2;3}{36-36}$ | $\frac{2,5,4}{24-12}$ | $\frac{2;5}{8-8}$ |
| 3 | $\frac{3;1}{7-7}$ | $\frac{3;2}{12-12}$ | | $\frac{3;4}{15-15}$ | $\frac{3,2,5}{44-22}$ |
| 4 | $\frac{4;1}{6-6}$ | $\frac{4,3,2}{36-18}$ | $\frac{4;3}{18-18}$ | | $\frac{4,1,2,5}{62-20,7}$ |
| 5 | $\frac{5,4,1}{14-7}$ | $\frac{5,3,2}{44-22}$ | $\frac{5;3}{24-24}$ | $\frac{5;4}{10-10}$ | |

Из сравнения элементов первой строки табл. 29 $\varepsilon_{1,j}$ видно, что минимальным удельным энергозатратам соответствует кратчайший маршрут $\mu_{1,2}$ ($\varepsilon_{1,2} = 4$), поэтому на первом шаге ($t = 1$) текущее решение равно:

$$t = 1: \mu_{1,2}^1 = \langle 1;2 \rangle, \quad \mathcal{E}(\mu_{1,2}^1) = 4. \quad (4.27)$$

На втором шаге из пункта A_2 маршрут с минимальными удельными энергозатратами $\mu_{2,5}^0$ (табл. 29, $\varepsilon_{2,5} = 8$, строка $i = 2$) подсоединяется справа к маршруту (4.27) и после шага $t = 2$ получаем удлинённую часть искомого цикла:

$$t = 2: \langle 1;2 \rangle \cup \langle 2;5 \rangle = \langle 1,2,5 \rangle = \mu_{1,5}^2, \quad \mathcal{E}(\mu_{1,5}^2) = 20. \quad (4.28)$$

Так как маршрут оканчивается в пункте A_5 , то, переходя к строке $i = 5$ (табл. 29), находим очередной присоединяемый кратчайший маршрут $\mu_{5,4}^3 = \langle 5;4 \rangle$, которому соответствуют минимальные удельные энергозатраты ($\varepsilon_{5,4} = 10$)¹. Подсоединяя $\mu_{5,4}^3$ к (4.28), после 20-третьего шага получим

$$t = 3: \mu_{1,5}^2 \cup \mu_{5,4}^3 = \langle 1,2,5 \rangle \cup \langle 5;4 \rangle = \langle 1,2,5,4 \rangle = \mu_{1,4}^3, \quad \mathcal{E}(\mu_{1,4}^3) = 50. \quad (4.29)$$

Переходя далее к строке $i = 4$, снова уточняем табличные значения величин $\varepsilon_{4,j}^3$, учитывая тот факт, что к моменту получения маршрута (4.29) часть активных элементов уже вошла в него, и фактически осталось включить только элемент $j = 3$ (не считая замыкающий $j = 1$). Пересчет производится по формуле

$$\varepsilon_{ij}' = \frac{\mathcal{E}_{ij} - a_k L_k}{n_{ij} - 1}, \quad (4.30)$$

где k – номер исключаемого (уже вошедшего в (4.29)) элемента.

Уточнённые значения удельных энергозатрат, согласно (4.30), равны:

$$\varepsilon_{4,1}' = \frac{0}{0}, \quad \varepsilon_{4,2}' = \frac{36 - 2 \cdot 9}{2 - 1} = 18, \quad \varepsilon_{4,3}' = \varepsilon_{4,3} = 18.$$

Из этих элементов выбирается элемент $\varepsilon_{4,3}$, так как ему соответствует маршрут $\mu_{4,3}$ (табл. 29, $i = 4$).

¹ Удельные энергозатраты $\varepsilon_{5,1} = 7$ после шага $t = 2$ должны быть пересчитаны, так как элемент $j = 1$ уже вошёл в (4.28) и при пересчёте из $\mu_{5,1} = \langle 5,4,1 \rangle$ должен быть исключён как повторный, а потому уточнённое значение удельных энергозатрат равно $\varepsilon_{5,1}' = 10$.

Подсоединяя далее к (4.29) маршрут $\mu_{4,3} = \langle 4;3 \rangle$ (табл. 29, $i = 4$), получим

$$t = 4: \langle 1,2,5,4 \rangle \cup \langle 4;3 \rangle = \langle 1,2,5,4,3 \rangle = \mu_{1,3}^4, \quad \mathcal{E}(\mu_{1,3}^4) = 104. \quad (4.31)$$

Остаётся к маршруту (4.31) подключить элемент $j = 1$, замыкающий цикл. Переходя к строке $i = 3$ (табл. 29), видим, что искомым является маршрут $\mu_{3,1}$. После подключения его к (4.31) получаем оптимальное решение (см. табл. 27):

$$t = 5: \mu_1^0 = \mu_{1,1}^5 = \langle 1,2,5,4,3,1 \rangle, \quad \mathcal{E}(\mu_1^0) = 120. \quad (4.32)$$

В ряде случаев число шагов может быть уменьшено, если ввести и применить **принцип доминирования**, состоящий в следующем. Из строки $i = 1$ (табл. 29) видно, что маршрут $\mu_{1,5} = \langle 1,2,5 \rangle$ *включает в себя (поглощает) все элементы исходного маршрута* $\mu_{1,2} = \langle 1;2 \rangle$, и при этом его удельные энергозатраты $\varepsilon_{1,5} = 10$ *превышают только* удельные затраты поглощенного маршрута ($\varepsilon_{1,2} = 4$). В этом случае маршрут $\mu_{1,5}$ **доминирует над маршрутом** $\mu_{1,2}$ ($\mu_{1,5} \succ \mu_{1,2}$). Аналогичным образом маршрут $\mu_{1,4}$ превосходит маршрут $\mu_{1,5}$ (табл. 29, $i = 1$), и поэтому в качестве исходного можно использовать сразу маршрут $\mu_{1,4} = \langle 1,2,5,4 \rangle$, полученный ранее только на шаге $t = 3$, (4.29). Далее принцип доминирования не срабатывает, и после двух последующих шагов ($t = 4;5$) получаем решение (4.32).

Формально **условия доминирования** маршрута μ_{ks} над маршрутом $\mu_{k\gamma}$ запишутся в виде

$$\left. \begin{array}{l} \mu_{k,s} \supset \mu_{k,\gamma}, \\ \varepsilon_{k,s} = \min_{\forall j \neq \gamma} \varepsilon_{k,j} \end{array} \right\} \Rightarrow \mu_{ks} \succ \mu_{k\gamma}. \quad (4.33)$$

Условие (4.33) означает, что маршрут $\mu_{k,s}$ содержит в себе все элементы маршрута $\mu_{k,\gamma}$, и при этом его удельные энергозатраты являются наименьшими, чем у остальных маршрутов, исключая доминируемый (второе условие).

Рассмотренный метод последовательного наращивания цикла по

принципу минимальных удельных энергозатрат, так же как и по *принципу убывания веса*, является неформальным, а следовательно, в зависимости от конкретных условий задачи каждый из них может привести к худшему или лучшему решению. Поскольку оба принципа реализуют достаточно простые вычислительные процедуры, то в ходе расчетов целесообразно получить решения на основе обоих принципов и выделить из них лучшее.

Выводы

1. Обобщение классической задачи коммивояжера, связанное с требованием доставки a_j ед. груза в пункт A_j , существенно усложняет решение задачи. **Критерий энергозатрат** в равной степени учитывает и **вес груза** a_j ($j = \overline{1, n}$), и **расстояние**, на которое он перевозится. Оптимальное решение (цикл), как правило, отличается от цикла минимальной длины. Классическая задача коммивояжера соответствует частному случаю обобщенной задачи: $\forall j \neq 1: a_j = 0, a_1 = 1$.

2. Немодифицированный метод расширения цикла обеспечивает получение решения только при полной ($\varphi = 1$) матрице расстояний. В полученном решении каждый элемент j содержится **только по одному разу**, за исключением начального.

3. Необходимое условие оптимальности решения, полученного методом расширения цикла, состоит в том, что **каждая пара смежных вершин (их номеров в цикле) является кратчайшим маршрутом**.

Невыполнение указанного условия открывает возможность улучшения решения путём замены в цикле той пары элементов (i, j) , которая не образует кратчайшего маршрута, на кратчайший маршрут с теми же граничными элементами (i, j) . После улучшения в цикле появятся **повторяющиеся элементы**.

4. Модифицированный метод расширения цикла обеспечивает получение решения классической и обобщенной задач коммивояжера при неполной ($\varphi \leq 1$), но полносвязной матрице расстояний \mathbf{c} . Специфика модифицированного метода расширения цикла обеспечивает выполнение необходимого условия оптимальности (раздел 2, 1-й вывод). При этом в решении, как правило, **появляются повторяющиеся элементы** j .

5. Необходимым условием оптимальности решения, полученного модифицированным методом расширения цикла, является **невозможность его улучшения путём удаления любого элемента, содержащегося в конечном цикле более одного раза**. Согласно этому условию, решение классической задачи коммивояжера, полученное модифицированным

методом расширения цикла, может быть улучшено путём удаления тех повторяющихся элементов, каждый из которых совместно с двумя смежными элементами **не составляет кратчайший маршрут**. Для обобщенной задачи коммивояжера это правило справедливо только для **транзитных элементов**. Активный элемент удаляется, если его удаление в целом приводит к уменьшению энергозатрат. Однако и совместного выполнения обоих необходимых условий недостаточно для утверждения об оптимальности полученного решения.

6. В отличие от классической задачи коммивояжера, решение обобщенной задачи коммивояжера не инвариантно относительно начального пункта цикла. Среди n пунктов существует, по крайней мере, один, выбор которого в качестве исходного обеспечит минимум энергозатрат по сравнению с оптимальными решениями при других исходных пунктах.

5. СРАВНИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА РАССМОТРЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОММИВОЯЖЕРА

Для наиболее трудоёмких методов решения рассмотренных задач объем элементарных операций оценивается полиномом не выше третьей степени, при этом для повышения гарантии оптимальности решения требуется некоторое увеличение объема вычислений. На одном общем для всех методов тестовом примере проиллюстрируем их вычислительные схемы, что позволит провести сравнение методов и выявить их особенности.

5.1. Решение тестового примера задачи коммивояжера методом расширения цикла

Исходные данные тестового примера представлены матрицей расстояний, записанной в табл. 30. Элементы матрицы расстояний с выбраны произвольно от 1 до 30. Матрица полная ($\varphi = 1$), что позволит для решения наряду с модифицированным использовать и немодифицированный метод расширения цикла.

Вычислительная схема метода расширения цикла подробно описана и проиллюстрирована в подразделе 3.2. Порядок решения представлен блок-схемой (рис. 3), поэтому рассмотрим только результаты решения классической задачи коммивояжера, представленные в табл. 32 *для всех вариантов возможных начальных циклов*.

Оптимальными являются (табл. 32) только 5 из 15 возможных

вариантов ($P_1 = 5/15 = 0,33$). Чтобы лучшее из m полученных решений (с различными начальными циклами) можно было бы с гарантией $P_\Gamma = 0,99$ считать оптимальным, необходимо $m = 11$ раз решить задачу, что следует из (3.4):

$$m = \frac{\lg(1 - P_\Gamma)}{\lg(1 - p_1)} = \frac{\lg 0,01}{\lg 0,67} \approx 11.$$

Из 15 вариантов в 5 случаях (табл. 32) получено точное решение ($L = 41$), в 8 случаях погрешность равна 4,9 % ($L = 43$)Ю, и в двух случаях погрешность достигла величины 34 % ($L = 55$). В двух последних столбцах табл. 32 записаны решения, улучшенные на основе проверки *первого необходимого условия оптимальности*¹. Элементы, включенные в цикл после проверки указанного условия (табл. 31), выделены жирным шрифтом в предпоследнем столбце. Указанные выше погрешности снизились соответственно до 2,4 % и 14,6 %.

Заметим, что в улучшенных решениях появились *повторяющиеся* (транзитные) элементы. В проверке для них второго необходимого условия оптимальности нет необходимости, так как включенные элементы по условию принадлежат кратчайшим маршрутам.

Таблица 30. $\|c_{ij}\|$, $\varphi = 1$

| $i \backslash j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|----|----|----|----|----|----|
| 1 | | 1 | 16 | 5 | 22 | 9 |
| 2 | 12 | | 21 | 10 | 27 | 3 |
| 3 | 23 | 18 | | 14 | 24 | 29 |
| 4 | 4 | 8 | 30 | | 7 | 25 |
| 5 | 20 | 28 | 2 | 13 | | 17 |
| 6 | 6 | 15 | 26 | 11 | 19 | |

¹ Каждая смежная пара индексов в конечном цикле должна образовывать кратчайший маршрут. Проверка условия 2-НОУ делает оба худших решения (табл. 32, $L = 47$) оптимальными путём замены $\langle 1,2,3 \rangle$ на $\langle 1,4 \rangle$ (табл. 31).

Таблица 31. Совмещенная матрица $\left\| \frac{\mu_{ij}^0}{L_{ij} - \varepsilon_{ij}} \right\|$

| $i \backslash j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ε_{i,j_i} | i, j_i |
|------------------|------------------------|--------------------------|----------------------------|----------------------------|--------------------------|-------------------------|-----------------------|----------|
| 1 | | $\frac{1;2}{1-1,0}$ | $\frac{1,4,5,3}{14-4,7}$ | $\frac{1;4}{5-5,0}$ | $\frac{1,4,5}{12-6,0}$ | $\frac{1,2,6}{4-2,0}$ | 4,7 | 1;3 |
| 2 | $\frac{2,6,1}{9-4,5}$ | | $\frac{2;3}{21-21,0}$ | $\frac{2;4}{10-10,0}$ | $\frac{2,4,5}{17-8,5}$ | $\frac{2;6}{3-3,0}$ | 4,5 | 2;1 |
| 3 | $\frac{3,4,1}{18-9,0}$ | $\frac{3;2}{18-18,0}$ | | $\frac{3;4}{14-14,0}$ | $\frac{3,4,5}{21-10,5}$ | $\frac{3,2,6}{21-10,5}$ | 9,0 | 3;1 |
| 4 | $\frac{4;1}{4-4,0}$ | $\frac{4,1,2}{5-5,2}$ | $\frac{4,5,3}{9-4,5}$ | | $\frac{4;5}{7-7,0}$ | $\frac{4,1,2,6}{8-2,7}$ | 2,7 | 4;6 |
| 5 | $\frac{5,4,1}{17-8,5}$ | $\frac{5,4,1,2}{18-6,0}$ | $\frac{5;3}{2-2,0}$ | $\frac{5;4}{13-13,0}$ | | $\frac{5;6}{17-17,0}$ | 6,0 | 5; |
| 6 | $\frac{6;1}{6-6,0}$ | $\frac{6,1,2}{7-3,5}$ | $\frac{6,1,4,5,3}{20-5,0}$ | $\frac{6;4-6,1,4}{11-5,5}$ | $\frac{6,1,4,5}{18-6,0}$ | | 5,0 | 6; |

Таблица 32

| Динамика расширения цикла | | | | | | | | | | | 1-НОУ | |
|---------------------------|-----------|---------|-----------|---------|-----------|---------|-------------|---------|---------------|---------|-----------------|------------|
| k | μ_k^1 | L_k^1 | μ_k^2 | L_k^2 | μ_k^3 | L_k^3 | μ_k^4 | L_k^4 | μ_k^5 | L_k^5 | μ_k^{5Y} | L_k^{5Y} |
| 1 | 1,2,1 | 13 | 1,2,6,1 | 10 | 1,2,6,4,1 | 19 | 1,2,6,5,4,1 | 40 | 1,2,6,5,3,4,1 | 43 | 1,2,6,4,5,3,4,1 | 42 |
| | 1,3,1 | 39 | 1,3,4,1 | 34 | 1,2,3,4,1 | 40 | 1,2,5,3,4,1 | 48 | 1,2,6,5,3,4,1 | 43 | 1,2,6,4,5,3,4,1 | 42 |
| | 1,4,1 | 9 | 1,2,4,1 | 15 | 1,2,6,4,1 | 19 | 1,2,6,5,4,1 | 40 | 1,2,6,5,3,4,1 | 43 | 1,2,6,4,5,3,4,1 | 42 |
| | 1,5,1 | 42 | 1,4,5,1 | 32 | 1,4,5,6,1 | 35 | 1,2,4,5,6,1 | 41 | 1,2,4,5,3,6,1 | 55 | 1,2,4,5,3,2,6,1 | 47 |
| | 1,6,1 | 15 | 1,2,6,1 | 10 | 1,2,6,4,1 | 19 | 1,2,6,5,4,1 | 40 | 1,2,6,5,3,4,1 | 43 | 1,2,6,4,5,3,4,1 | 42 |
| 2 | 2,3,2 | 39 | 2,3,4,2 | 43 | 2,3,4,1,2 | 40 | 2,5,3,4,1,2 | 48 | 2,6,5,3,4,1,2 | 43 | 2,6,4,5,3,4,1,2 | 42 |
| | 2,4,2 | 18 | 2,4,1,2 | 13 | 2,6,4,1,2 | 19 | 2,4,5,4,1,2 | 40 | 2,6,5,4,1,2 | 40 | 2,6,4,5,3,4,1,2 | 42 |
| | 2,5,2 | 55 | 2,4,5,2 | 45 | 2,4,5,3,2 | 37 | 2,6,4,5,3,2 | 41 | 2,6,1,4,5,3,2 | 41 | 2,6,1,4,5,3,2 | 41 |
| | 2,6,2 | 18 | 2,6,1,2 | 10 | 2,6,4,1,2 | 19 | 2,6,5,4,1,2 | 40 | 2,6,5,3,4,1,2 | 43 | 2,6,4,5,3,4,1,2 | 42 |
| 3 | 3,4,3 | 44 | 3,4,5,3 | 23 | 3,2,4,5,3 | 37 | 3,2,6,4,5,3 | 41 | 3,2,6,1,4,5,3 | 41 | 3,2,6,1,4,5,3 | 41 |
| | 3,5,3 | 26 | 3,4,5,3 | 23 | 3,2,4,5,3 | 37 | 3,2,6,4,5,3 | 41 | 3,2,6,1,4,5,3 | 41 | 3,2,6,1,4,5,3 | 41 |
| | 3,6,3 | 55 | 3,2,6,3 | 47 | 3,2,6,5,3 | 42 | 3,2,6,4,5,3 | 41 | 3,2,6,1,4,5,3 | 41 | 3,2,6,1,4,5,3 | 41 |
| 4 | 4,5,4 | 20 | 4,5,3,4 | 23 | 4,5,3,2,4 | 37 | 4,5,3,2,6,4 | 41 | 4,5,3,2,6,1,4 | 41 | 4,5,3,2,6,1,4 | 41 |
| | 4,6,4 | 36 | 4,2,6,4 | 22 | 4,1,2,6,4 | 19 | 4,1,2,6,5,4 | 40 | 4,1,2,6,5,3,4 | 43 | 4,1,2,6,4,5,3,4 | 42 |
| 5 | 5,6,5 | 36 | 5,6,4,5 | 35 | 5,6,1,4,5 | 35 | 4,5,6,1,2,4 | 41 | 4,5,3,6,1,2,4 | 55 | 4,5,3,2,6,1,4 | 41 |

5.2. Решение тестового примера задачи коммивояжера модифицированным методом расширения цикла

Для решения задачи коммивояжера модифицированным методом расширения цикла эстафетным методом (раздел 2) получено все множество кратчайших маршрутов, записанное в совмещенной матрице (табл. 31). Длина маршрута определена по формуле (2.1), а *среднее* расстояние между смежными объектами в цикле (ε_{ij} – удельное расстояние) – по формуле

$$\varepsilon_{ij} = L_{ij} / n_{ij}, \quad \forall i \neq j, \quad (5.1)$$

где n_{ij} – количество активных (не включенных ранее в цикл) номеров пунктов.

Вычисления по модифицированному методу расширения цикла приведены в табл. 33. Они начинаются с начального цикла $\mu_1^H = \langle 1;1 \rangle$. В интервал $(1;1)$ последовательно включается каждый из элементов $\gamma \in G^1$, при этом элемент γ с граничными элементами интервала связывается *кратчайшими маршрутами*, что отмечается точками, стоящими между соответствующими элементами. Кратчайшие маршруты выбираются из табл. 31. Например, для $r=1$, $\gamma=2$, μ_1^H имеем

$$\langle j^{r-1} \cdot \gamma \cdot j^r \rangle = \langle 1 \cdot 2 \cdot 1 \rangle = \mu_{1,2}^0 \cup \mu_{2,1}^0 = \langle 1;2 \rangle \cup \langle 2,6,1 \rangle = \langle 1,2,6,1 \rangle,$$

что и записано в графе 4 табл. 33 (строка 1), где включаемые в цикл элементы выделены жирным шрифтом.

Величина приращения цикла $\delta^t(r, \gamma)$, получаемая при этом, вычисляется по формуле (5.2) [см. также (3.7)] по числовым данным табл. 30, 31.

Минимум удельного расстояния $\varepsilon^1(r, \gamma)$ соответствует (табл. 33) текущему циклу, записанному в строках 1 и 5 (графа 4), для которого $\varepsilon^1(1;2) = 5$. Необходимо проверить, существует ли среди приведенных найденных циклов (строки 1 – 5) такой, что превосходит цикл $\langle 1,2,6,1 \rangle$, $\varepsilon(1;2) = 5$, то есть такой, для которого выполняются условия доминирования (4.33).

В графе 7 ближайшим к $\varepsilon(1;2) = \varepsilon(1;6) = 5$ значением является $\varepsilon(1;4) = 9$. Соответствующий ему цикл $\langle 1,4,1 \rangle$ *не включает* в себя все элементы цикла $\langle 1,2,6,1 \rangle$, то есть условия (4.33) не выполняются.

Таблица 33. Динамика процесса решения задачи коммивояжера модифицированным методом расширения цикла

| $t = 1, G^1 = \{2,3,4,5,6\}, \mu_1^H = \langle 1;1 \rangle, L^H = 0$ | | | | | | | | | |
|--|--|----------|----------------|----------------------------------|-----------------------|------------------|----------------------------|-----------|-------------|
| № | r | γ | j^{r-1}, j^r | $j^{r-1} \cdot \gamma \cdot j^r$ | $\delta^t(r, \gamma)$ | $n^t(r, \gamma)$ | $\varepsilon^t(r, \gamma)$ | L^t | G^t |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1 | 1 | 2 | 1;1 | 1,2,6,1 | 1+9-0=10 | 2 | 5,0 | 10 | 3,4,5 |
| 2 | 1 | 3 | 1;1 | 1,4,5,3,4,1 | 14+18-0=32 | 3 | 10,7 | 32 | 2;6 |
| 3 | 1 | 4 | 1;1 | 1,4,1 | 5+4-0=9 | 1 | 9,0 | 9 | 2,3,5,6 |
| 4 | 1 | 5 | 1;1 | 1,4,5,4,1 | 12+17-0=29 | 2 | 14,5 | 29 | 2,3,6 |
| 5 | 1 | 6 | 1;1 | 1,2,6,1 | 4+6-0=10 | 2 | 5,0 | 10 | 3,4,5 |
| 6 | $t = 2, G^2 = \{3,4,5\}, \mu_1^1 = \langle 1,2,6,1 \rangle, L^1 = 10$ | | | | | | | | |
| 7 | 1 | 3 | 1;2 | 1,4,5,3,2 | 14+18-1=31 | 3 | 10,3 | 41 | \emptyset |
| 8 | 1 | 4 | 1;2 | 1,4,1,2 | 5+5-1=9 | 1 | 9,0 | 19 | 3;5 |
| 9 | 1 | 5 | 1;2 | 1,4,5,4,1,2 | 12+18-1=29 | 2 | 14,5 | 39 | 3;4 |
| 10 | 2 | 3 | 2;6 | 2,3,2,6 | 21+21-3=39 | 1 | 39,0 | 49 | 4;5 |
| 11 | 2 | 4 | 2;6 | 2,4,1,2,6 | 10+8-3=15 | 1 | 15,0 | 25 | 3;5 |
| 12 | 2 | 5 | 2;6 | 2,6,5,6 | 22+17-3=36 | 1 | 36,0 | 46 | 3;4 |
| 13 | 3 | 3 | 6;1 | 6,4,5,3,4,1 | 20+18-6=32 | 3 | 10,7 | 42 | \emptyset |
| 14 | 3 | 4 | 6;1 | 6,4,1 | 11+4-6=9 | 1 | 9,0 | 19 | 3;5 |
| 15 | 3 | 5 | 6;1 | 6,4,5,4,1 | 18+17-6=29 | 2 | 14,5 | 39 | 3 |
| 16 | $t = 3, G^3 = \emptyset, \mu_1^2 = \langle 1,4,5,3,2,6,1 \rangle, L^2 = L(\mu_1^2) = 41$ | | | | | | | | |

Примечания:

$$\delta^t(r, \gamma) = L(\mu_{j^{r-1}, \gamma}^0) + L(\mu_{\gamma, j^r}^0) - c_{j^{r-1}, j^r}, \quad (5.2)$$

$$\varepsilon^t(r, \gamma) = \delta^t(r, \gamma) / n^t(r, \gamma),$$

$$L^{t+1} = L^t + \delta^t(r, \gamma). \quad (5.3)$$

Следовательно, на первом шаге в цикл включается элемент $\gamma = 2$ и попутно с ним элемент $j = 6$ (строка 1), или наоборот: $\gamma = 6$ и $j = 2$ (строка 5). Полученный *расширенный* цикл (строка 6) является исходным для второго шага процесса.

Минимальное *удельное приращение* длины цикла $\varepsilon^2(r, \gamma) = 9,0$ (табл. 33, $t = 2$, графа 7) обеспечивается при включении элемента $\gamma = 4$ в интервал $r = 1$ (строка 8) или элемента $\gamma = 4$ в интервал $r = 3$ (строка 14).

Однако над обоими этими вариантами *доминирует* вариант с включением в интервал $r = 1$ элемента $\gamma = 3$ (строка 7). Для этого варианта выполняются условия доминирования (4.33): значение удельного приращения $\varepsilon^2(1;3) = 10,3$ – минимальное среди всех оставшихся вариантов (кроме $\varepsilon = 9$), и **он включает в себя любой из других вариантов**, так как соответствующий ему цикл содержит множество всех элементов ($G^2 = \emptyset$, графа 9, строка 7). Ближайший к нему по значению удельного приращения ($\varepsilon^2(3;3) = 10,7$) вариант *равносилен* только по первому условию (4.33), а потому не доминирует над ним. Следовательно, решение будет получено при включении элемента $\gamma = 3$ в интервал $\langle 1;2 \rangle$ маршрута μ_1^1 (строка 6), при этом **попутно** в составе соединяющих кратчайших маршрутов в цикл войдут и два других *активных* элемента ($j = 4$ и 5), завершая построение цикла. Решение получим, если участок $\langle 1;2 \rangle$ в текущем решении μ_1^1 (табл. 33, строка 6,) заменим расширенным участком $\langle 1,4,5,3,2 \rangle$ (строка 7). Полученное решение записано в строке 16 табл. 33, при этом длина цикла найдется по рекуррентной формуле (5.3):

$$L(\mu_1^2) = L^2 = L^1 + \delta^1(1;3) = 10 + 31 = 41.$$

Аналогично найдется решение, например, и для конкурирующего варианта (табл. 33, строка 13):

$$\begin{aligned} \mu_1^2 &= \langle 1;2 \rangle \cup \langle 6,4,5,3,4,1 \rangle = \langle 1,2,6,4,5,3,4,1 \rangle, \\ L^2' &= L^1 + \delta^2(3;3) = 10 + 32 = 42. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Полученные решения могут быть найдены (табл. 32) и немодифицированным методом расширения цикла, при этом в ряде случаев решения могут быть улучшены при проверке *первого необходимого условия оптимальности*. При решении задачи модифицированным методом расширения цикла в такой проверке не возникает необходимости, но при появлении в решении повторяющихся элементов для них проверяется *второе необходимое условие оптимальности*, позволяющее в ряде случаев улучшить решение.

Однако, как отмечалось ранее, основным достоинством модифицированного метода расширения цикла является не столько некоторое сокращение объема вычислений, сколько возможность решения задачи при *неполной* ($\varphi < 1$) матрице расстояний.

5.3. Решение тестового примера задачи коммивояжера комбинированным методом расширения цикла

Суть комбинированного метода расширения цикла состоит в том, что, начиная с начального цикла $\mu^H = \langle k; k \rangle$, по критерию ε выполняется первый шаг **модифицированного** метода расширения цикла. Полученный при этом текущий цикл является начальным циклом для последующего решения **немодифицированным** методом расширения цикла. Для иллюстрации метода используем полученные ранее результаты.

На первом шаге (табл. 33) получено текущее решение

$$\mu_1^1 = \langle 1, 2, 6, 1 \rangle, \quad L(\mu_1^1) = 10, \quad G^2 = \{3, 4, 5\}.$$

Далее процесс осуществляется по методу расширения цикла, его динамика представлена в первой строке табл. 32. После следующих трех шагов получено решение (табл. 32, нижняя строка в рубрике $k = 1$)

$$\mu_1^5 = \langle 1, 2, 6, 5, 3, 4, 1 \rangle, \quad L(\mu_1^5) = 43.$$

Его улучшение на основе первого необходимого условия оптимальности приводит к окончательному решению, совпадающему с решением (5.4). Погрешность составляет 2,4 %.

Комбинированный метод расширения цикла обеспечивает некоторое уменьшение объема вычислений, тем большее, чем большее количество элементов будет включено в текущий цикл на первом шаге процесса.

5.4. Решение тестового примера задачи коммивояжера методом последовательного наращивания цикла

Метод последовательного наращивания цикла ранее был рассмотрен применительно к решению обобщенной задачи коммивояжера. В обычной задаче коммивояжера изменится только смысл величины ε_{ij} : теперь это не *удельные энергозатраты* (средние энергозатраты на доставку груза к одному пункту (4.17)), а *удельное расстояние* (среднее расстояние между пунктами в цикле (5.1)). Принцип доминирования (4.33) остается справедлив для обеих задач, несмотря на то, что физический смысл величины ε_{ij} в каждом случае разный. Методом последовательного наращивания цикла по критерию ε найдем решение задачи коммивояжера, выходящего из пункта A_1 (табл. 30). Для получения решения достаточно иметь совмещенную матрицу, представленную в табл. 31.

Начальное звено цикла $\langle 1;2 \rangle$ соответствует минимальному значению удельного расстояния ($\varepsilon_{1,2} = 1$), однако согласно принципу доминирования (4.33) выбирается маршрут $\langle 1,2,6 \rangle$ (табл. 31, строка $i = 1$).

Очередной присоединяемый участок цикла следует найти в строке $i = 6$ табл. 31, однако вначале пересчитываются значения $\varepsilon_{6,j}$, $j = 1;5$. С учетом того, что элементы $\{1,2,6\}$ уже вошли в наращиваемый цикл и теперь не являются активными, согласно (5.1) имеем

$$\varepsilon_{6,1} = \varepsilon_{6,2} = \infty, \quad \varepsilon_{6,3} = 6.7, \quad \varepsilon_{6,4} = 11, \quad \varepsilon_{6,5} = 9.$$

Например, присоединение к маршруту $\langle 1,2,6 \rangle$ участка $\mu_{6,2}^0 = \langle 6,1,2 \rangle$ не добавит ни одного активного элемента, так как элементы $j = 1$ и 2 уже включены в маршрут $\mu_{1,6}^0$ и, значит, знаменатель в (5.1) равен нулю.

В соответствии с минимальным значением ε к первому звену цикла $\langle 1,2,6 \rangle$ присоединяется недоминируемый маршрут $\mu_{6,3}^0 = \langle 6,1,4,5,3 \rangle$ (табл. 31), в котором содержатся остальные активные элементы $\{3,4,5\}$. К элементу $j = 3$ остается присоединить маршрут $\mu_{3,1}^0$, замыкающий цикл. $\mu_{3,1}^0 = \langle 3,4,1 \rangle$ (табл. 31), поэтому окончательно получим

$$\mu_1 = \langle 1,2,6 \rangle \cup \langle 6,1,4,5,3 \rangle \cup \langle 3,4,1 \rangle = \langle 1,2,6,1,4,5,3,4,1 \rangle, \quad L(\mu_1) = 42. \quad (5.5)$$

Первое необходимое условие оптимальности выполнено по построению. Второе необходимое условие оптимальности также соблюдено, однако позволяет из решения удалить внутренний элемент $j = 1$. Его наличие связано с неоднозначностью кратчайшего пути $\mu_{6,4}^0$ (табл. 31).

Решение (5.5) фактически совпадает с решениями, полученными методом расширения цикла (табл. 32). Его погрешность равна 2,4 %.

Наряду с рассмотренным неформальным подходом, опирающимся на физические условия и специфику задачи коммивояжера, возможны и другие принципы формирования цикла, учитывающие те или иные особенности задачи. Важным фактором при этом является *количество активных элементов*, присоединяемых к циклу на каждом шаге процесса. На первом шаге их количество может быть увеличено, если использовать свойство **инвариантности оптимального решения к исходному пункту цикла**. Это позволяет выбрать исходный пункт цикла таким образом, чтобы в начальный участок цикла вошло *как можно большее число активных элементов*, при этом выбор начального участка цикла осуществляется в таком порядке.

Из каждой строки ($i = \overline{1;n}$) совмещенной матрицы кратчайших маршрутов (табл. 31) в правый столбец записывается **удельное расстояние** $\varepsilon_{i,j}$ маршрута, который содержит *наибольшее количество звеньев*.

Если в строке содержится несколько маршрутов с наибольшим и одинаковым количеством звеньев, то из них выбирается тот, для которого значение $\varepsilon_{i,j}$ минимально (табл. 31, строки 2 и 3).

В качестве начального участка цикла берется маршрут, соответствующий *минимальному* значению ε_{ij} . Дальнейший процесс, протекает в том же порядке, как было описано ранее, что приведет к решению

$$\mu_4^3 = \langle 4,1,2,6 \rangle \cup \langle 6,1,4,5,3 \rangle \cup \langle 3;4 \rangle = \langle 4,1,2,6,1,4,5,3,4 \rangle = \langle 4,1,2,6,4,5,3,4 \rangle, \quad (5.6)$$

где элемент $j = 1$ (внутренний) удален при проверке второго необходимого условия оптимальности. Это обусловлено, как отмечалось ранее, неоднозначностью кратчайшего маршрута $\mu_{6,4}^0$ (табл. 31).

Если исходным должен быть пункт A_1 , то согласно 4-му выводу (раздел 3) из (5.6) имеем

$$L\langle 4,1,2,6,4,5,3,4 \rangle = L\langle 1,2,6,4,5,3,4,1 \rangle = 42. \quad (5.7)$$

Решение (5.7) совпадает с полученным ранее (5.5) и близко к оптимальному (табл. 32).

Если в качестве начала цикла взять маршрут, содержащий *наибольшее число звеньев* (активных элементов), то придем к оптимальному решению

$$\mu_6^3 = \langle 6,1,4,5,3 \rangle \cup \langle 3;2 \rangle \cup \langle 2;6 \rangle = \langle 6,1,4,5,3,2,6 \rangle, \quad L(\mu_6^3) = 41.$$

Однако нет достаточно убедительных обоснований, позволяющих использовать это правило в общем случае, как впрочем, их нет и для предыдущих правил. Поэтому метод последовательного наращивания цикла следует рассматривать как вспомогательный, требующий минимума затрат вычислительных ресурсов.

5.5. Решение тестового примера обобщенной задачи коммивояжера методом последовательного наращивания цикла

Для данного примера (табл. 34) дополнительной исходной информацией является вектор веса доставляемых грузов, компоненты которого записаны ниже табл. 34. Для решения обобщенной задачи коммивояжера, минимизирующей энергозатраты методом последовательного наращивания цикла, вычислена совмещенная матрица *кратчайший маршрут – энергозатраты – удельные энергозатраты* (табл. 35, формулы (4.1), (4.17)).

В первой строке (начало цикла в пункте A_1) минимальным удельным энергозатратам $\varepsilon_{1,2} = 5$ соответствует начало цикла $\langle 1;2 \rangle$. Ближайшим по удельным энергозатратам является маршрут $\langle 1;4 \rangle$, однако он не включает в себя маршрут $\langle 1;2 \rangle$ (условия доминирования (4.33) не выполнены), поэтому осуществляется переход к строке $i=2$, в которой находится очередной (недоминируемый) участок цикла $\langle 2;6 \rangle$. Продолжая процесс далее, получим решение

$$\mu_1 = \langle 1;2 \rangle \cup \langle 2;6 \rangle \cup \langle 6;4 \rangle \cup \langle 4;5 \rangle \cup \langle 5;3 \rangle \cup \langle 3,4,1 \rangle = \langle 1,2,6,4,5,3,4,1 \rangle. \quad (5.8)$$

Такой маршрут (5.5) был получен ранее, как ближайший к кратчайшему (табл. 32). Энергозатраты для полученного решения, согласно (4.1), равны:

$$\mathcal{E}\langle 1,2,6,4,5,3,4,1 \rangle = 5 \cdot 1 + 6 \cdot 4 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 22 + 4 \cdot 24 + 1 \cdot 42 = 263, \quad L(\mu_1) = 42.$$

Если доставку грузов реализовать по *принципу убывания веса*, то получим такое же решение (табл. 35):

$$j : 6, 2, 3, 5, 4, 1,$$

$$\mu_1 = \langle 1,2,6 \rangle \cup \langle 6,4,5,3 \rangle \cup \langle 3,4,1 \rangle = \langle 1,2,6,4,5,3,4,1 \rangle, \quad \mathcal{E}(\mu_1) = 263.$$

Для сравнения оценим энергозатраты решения, соответствующего циклу минимальной длины:

$$\mathcal{E}\langle 1,4,5,3,2,6,1 \rangle = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 12 + 3 \cdot 14 + 5 \cdot 32 + 6 \cdot 35 + 1 \cdot 41 = 513, \quad L_{\min} = 41.$$

Энергозатраты цикла минимальной длины почти вдвое больше, чем у полученного решения.

Таблица 34. $\|c_{ij}\|$

| $i \backslash j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|----|----|----|----|----|----|
| 1 | | 1 | 16 | 5 | 22 | 9 |
| 2 | 12 | | 21 | 10 | 27 | 3 |
| 3 | 23 | 18 | | 14 | 24 | 29 |
| 4 | 4 | 8 | 30 | | 7 | 25 |
| 5 | 20 | 28 | 2 | 13 | | 17 |
| 6 | 6 | 15 | 26 | 11 | 19 | |

$a_j: \quad 1 \quad 5 \quad 4 \quad 2 \quad 3 \quad 6$

Матрица расстояний c и вектор грузов a

Таблица 35. Совмещенная матрица $\left\| \frac{\mu_{ij}^0}{\partial_{ij} - \varepsilon_{ij}} \right\|$

| $i \backslash j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|-------------------------|----------------------------|--------------------------|-----------------------|-------------------------|---------------------------|
| 1 | | $\frac{1;2}{5-5,0}$ | $\frac{1,4,5,3}{102-34}$ | $\frac{1;4}{10-10,0}$ | $\frac{1,4,5}{46-23}$ | $\frac{1,2,6}{29-14,5}$ |
| 2 | $\frac{2,6,1}{27-13,5}$ | | $\frac{2;3}{82-82}$ | $\frac{2;4}{20-20}$ | $\frac{2,4,5}{71-35,5}$ | $\frac{2;6}{18-18,0}$ |
| 3 | $\frac{3,4,1}{46-23}$ | $\frac{3;2}{90-90}$ | | $\frac{3;4}{28-28,0}$ | $\frac{3,4,5}{91-45,5}$ | $\frac{3,2,6}{216-108}$ |
| 4 | $\frac{4;1}{4-4}$ | $\frac{4,1,2}{29-14,5}$ | $\frac{4,5,3}{57-28,5}$ | | $\frac{4;5}{21-21,0}$ | $\frac{4,1,2,6}{77-25,7}$ |
| 5 | $\frac{5,4,1}{43-21,5}$ | $\frac{5,4,1,2}{133-44,3}$ | $\frac{5;3}{8-8,0}$ | $\frac{5;4}{26-26}$ | | $\frac{5;6}{102-102}$ |
| 6 | $\frac{6;1}{6-6,0}$ | $\frac{6,1,2}{41-20,5}$ | $\frac{6,4,5,3}{156-52}$ | $\frac{6;4}{22-22}$ | $\frac{6,4,5}{76-38}$ | |

5.6. Решение тестового примера обобщенной задачи коммивояжера методом расширения цикла

Исходные данные остаются теми же. Они представлены в табл. 34 и вектором грузов $\mathbf{a} = (a_j)$.

Промежуточные и конечные результаты расчетов при решении задачи методом расширения цикла, блок-схема алгоритма которого представлена на рис. 4, приведены в табл. 36. В подразделе 4.2 даны подробные пояснения и обоснования к алгоритму метода расширения цикла.

С начального цикла (табл. 36) $\mu_1^H = \langle 1,3,1 \rangle$ (выбран произвольно) к началу пятого шага процесса множество номеров пунктов, еще не включенных в цикл, стало пустым ($G^5 = \emptyset$). Полученное решение несколько не совпадает с решениями, полученными методами последовательного наращивания цикла (5.8). Однако если отказаться от жесткого условия об однократности посещения пунктов, то, проверив первое необходимое условие оптимальности и заменив неоптимальный участок $\langle 3;1 \rangle$ в решении (табл. 37) на оптимальный $\langle 3,4,1 \rangle$ (табл. 35), получим решение (5.8).

Объем вычислений оказался значительным, однако для получения решения не потребовалось прибегать к использованию матрицы кратчайших маршрутов (табл. 35, 31).

Совпадение решений укрепляет уверенность в их оптимальности, однако не дает полной гарантии этого, так как каждый из методов содержит элементы неформального подхода.

Таблица 36

| | $t=1 \quad G^1 = \{2,4,5,6\}$ $\mathfrak{E}^1 \langle 1,3,1 \rangle = 103$ | | | $t=3 \quad G^3 = \{4;5\}$ $\mathfrak{E}^3 \langle 1,2,6,3,1 \rangle = 202$ | | |
|---|---|-------------------|---------------------------------|---|-------------------|---------------------------------|
| | r | $\mu_1^t(\gamma)$ | $\Delta \mathfrak{E}^t(\gamma)$ | r | $\mu_1^t(\gamma)$ | $\Delta \mathfrak{E}^t(\gamma)$ |
| 1 | 1 | 1,2,3,1 | 5+30=35 | 1 | 1,4,2,6,3,1 | 10+192=202 |
| 2 | 1 | 1,4,3,1 | 10+95=105 | 1 | 1,5,2,6,3,1 | 66+784=850 |
| 3 | 1 | 1,5,3,1 | 66+40=106 | 2 | 1,2,4,6,3,1 | 22+66=88 |
| 4 | 1 | 1,6,3,1 | 54+95=149 | 2 | 1,2,5,6,3,1 | 84+451=535 |
| 5 | 2 | 1,3,2,1 | 170+7=177 | 3 | 1,2,6,4,3,1 | 30+75=105 |
| 6 | 2 | 1,3,4,1 | 60+4=64 | 3 | 1,2,6,5,3,1 | 69 - 25=44 |
| 7 | 2 | 1,3,5,1 | 120+21=141 | 4 | 1,2,6,3,4,1 | 88 - 5=83 |
| 8 | 2 | 1,3,6,1 | 270+12=282 | 4 | 1,2,6,3,5,1 | 162+21=183 |
| 9 | $t=2 \quad G^2 = \{4,5,6\}$ $\mathfrak{E}^2 \langle 1,2,3,1 \rangle = 138$ | | | $t=4 \quad G^4 = \{4\}$ $\mathfrak{E}^4 \langle 1,2,6,5,3,1 \rangle = 246$ | | |

Продолжение табл. 36

| | | | | | | |
|----|---|-----------|------------|--|---------------|------------|
| 10 | 1 | 1,4,2,3,1 | 10+120=130 | 1 | 1,4,2,6,5,3,1 | 10+228=238 |
| 11 | 1 | 1,5,2,3,1 | 66+490=556 | 2 | 1,2,4,6,5,3,1 | 22+448=470 |
| 12 | 1 | 1,6,2,3,1 | 54+230=284 | 3 | 1,2,6,4,5,3,1 | 30 – 8=22 |
| 13 | 2 | 1,2,4,3,1 | 22+95=117 | 4 | 1,2,6,5,4,3,1 | 72+205=277 |
| 14 | 2 | 1,2,5,3,1 | 84+40=124 | 5 | 1,2,6,5,3,4,1 | 78 – 5=73 |
| 15 | 2 | 1,2,6,3,1 | 24+40=64 | $t = 5, \quad G^5 = \emptyset$ $\mathfrak{E}^5 \langle 1,2,6,4,5,3,1 \rangle = 268$ | | |
| 16 | 3 | 1,2,3,4,1 | 72 – 5=67 | | | |
| 17 | 3 | 1,2,3,5,1 | 138+21=159 | | | |
| 18 | 3 | 1,2,3,6,1 | 306+12=318 | | | |

5.7. Решение тестового примера обобщенной задачи коммивояжера модифицированным методом расширения цикла

Модифицированный метод расширения цикла подробно описан в подразделе 4.3, поэтому в решении тестового примера интерес представляют прежде всего конечные результаты расчетов как основные характеристики сравниваемых методов. Процесс решения модифицированным методом расширения цикла представлен в табл. 37.

На первом шаге процесса в начальный цикл вошло два элемента, при этом включаемый элемент $\gamma = 2$ соединен с границами интервалов посредством кратчайших маршрутов $\langle 1;2 \rangle$ и $\langle 2,6,1 \rangle$, взятых из табл. 31 (или табл. 35). Маршруту $\langle 1,2,6,1 \rangle$ соответствует наименьшее значение удельных энергозатрат $\varepsilon^1(1;2) = 14,5$, вычисленное по формулам (4.17), (4.1). Ближайшее к нему значение $\varepsilon^1(1;4) = 19$ принадлежит варианту $\langle 1,4,1 \rangle$ (табл. 37, строка 3), для которого условия доминирования (4.33) не выполняются. Недоминируемый вариант $\langle 1,2,6,1 \rangle$ берется в качестве исходного для второго шага процесса (табл. 37, $t = 2$). На втором шаге согласно второму необходимому условию оптимальности улучшен маршрут, записанный в строке 11, путем удаления элемента $j = 6$, отмеченного справа точкой.

Участок $\langle 5,6,1 \rangle$ не является кратчайшим. Его замена на $\langle 5;1 \rangle$, который также, не являясь кратчайшим, все-таки уменьшит длину на 3 ед. (табл. 31, 30). Если вместо $\langle 5;1 \rangle$ записать кратчайший маршрут $\langle 5,4,1 \rangle$ (табл. 31), то длина участка уменьшится на 6 ед., что уменьшит и энергозатраты.

Из графы 7 видно, что минимальные удельные энергозатраты соответствуют маршруту $\langle 1,2,6,4,1 \rangle$, и он должен быть выбран как начальный для очередного ($t = 3$) шага процесса. Однако число шагов может быть уменьшено, если использовать принцип доминирования (4.33).

Для проверки условий (4.33) в графе 7 (табл. 37, $t = 2$) определяется *ближайший к минимальному* ($\varepsilon^2(3;4) = 39,0$) элемент $\varepsilon^2(3;5) = 62,5$. Соответствующий этому элементу маршрут $\mu_1^2(3;5)$ включает в себя все элементы маршрута $\mu_1^2(3;4)$. Условия (4.33) выполнены и, следовательно, маршрут, записанный в строке 14, доминирует над маршрутом строки 13, который и выбывает из дальнейшего рассмотрения (знак минус в графе 7 строки 13). Процесс проверки на доминирование продолжается.

Ближайшее к $\varepsilon^2(3;5) = 62,5$ удельное приращение энергозатрат $\varepsilon^2(2;5) = 64,0$ соответствует текущему циклу, в который входит такое же множество элементов (см. строки 14 и 11, графа 8), следовательно, $\mu_1^2(3;5) \succ \mu_1^2(2;5)$ и исключается доминирующий вариант из дальнейшего анализа (табл. 37, знак минус в графе 7 строки 11).

Таблица 37. Динамика процесса решения
обобщенной задачи коммивояжера
модифицированным методом расширения цикла

| $t = 1, G^1 = \{2,3,4,5,6\}, \mu_1^0(\gamma) = \langle 1;1 \rangle, \mathcal{E}_1^0 = 0$ | | | | | | | | |
|--|-----|----------|----------------|----------------------|------------------------------|------------------|----------------------------|------------------|
| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| | r | γ | j^{r-1}, j^r | $\mu_1^t(r, \gamma)$ | $\mathcal{E}_1^t(r, \gamma)$ | $n^t(r, \gamma)$ | $\varepsilon^t(r, \gamma)$ | $G^2(r, \gamma)$ |
| 1 | 1 | 2 | 1;1 | 1,2,6,1 | 39 | 2 | 14,5 | 3,4,5 |
| 2 | 1 | 3 | 1;1 | 1,4,5,3,4,1 | 134 | 3 | 44,3 | 2;6 |
| 3 | 1 | 4 | 1;1 | 1,4,1 | 19 | 1 | 19,0 | 2,3,5,6 |
| 4 | 1 | 5 | 1;1 | 1,4,5,4,1 | 75 | 2 | 37,5 | 2,3,6 |
| 5 | 1 | 6 | 1;1 | 1,2,6,1 | 39 | 2 | 14,5 | 3,4,5 |
| $t = 2, G^2 = \{3,4,5\}, \mu_1^1 = \langle 1,2,6,1 \rangle, \mathcal{E}_1^1 = 39$ | | | | | | | | |
| | | | | | | | | $G^3(r, \gamma)$ |
| 6 | 1 | 3 | 1;2 | 1,4,5,3,2,6,1 | 513 | 3 | 158 | \emptyset |
| 7 | 1 | 4 | 1;2 | 1,4,1,2,6,1 | 157 | 1 | 118 | 3;5 |
| 8 | 1 | 5 | 1;2 | 1,4,5,4,1,2,6,1 | 433 | 2 | 197 | 3 |
| 9 | 2 | 3 | 2;6 | 1,2,3,2,6,1 | 400 | 1 | 361 | 4;5 |
| 10 | 2 | 4 | 2;6 | 1,2,4,1,2,6,1 | 166 | 1 | 127 | 3;5 |
| 11 | 2 | 5 | 2;6 | 1,2,6,4,5,6,1 | 167 | 2 | 64,0 – | 3 |
| 12 | 3 | 3 | 6;1 | 1,2,6,4,5,3,4,1 | 263 | 3 | 74,7 | \emptyset |
| 13 | 3 | 4 | 6;1 | 1,2,6,4,1 | 78 | 1 | 39,0 – | 3;5 |
| 14 | 3 | 5 | 6;1 | 1,2,6,4,5,4,1 | 164 | 2 | 62,5 – | 3 |
| $t = 3, G^3 = \emptyset, \mu_1^2 = \langle 1,2,6,4,5,3,4,1 \rangle, \mathcal{E}_1^2 = 263$ | | | | | | | | |

Очередным ближайшим к $\varepsilon^2(3;5) = 62,5$ элементом является $\varepsilon^2(3;3) =$

74,7, при этом соответствующий ему цикл включает все множество n элементов ($G^2(3;3)=\emptyset$, графа 8). Условия (4.33) выполнены и цикл $\mu^2(3;5)$ выбывает из дальнейших расчетов (знак минус в графе 7 строки 14). Полученный вариант (строка 12) *не доминируется* ближайшим к нему вариантом (строка 7), а поэтому он и должен быть использован как начальный для очередного шага процесса. Однако поскольку все элементы уже включены в цикл ($G^3=\emptyset$), то процесс заканчивается. Полученное решение записано в нижней строке табл. 37. Решение оптимально и совпадает с решениями, полученными другими методами ((5.8), табл. 36).

Проверка условий доминирования (4.33) требует значительно меньше усилий, чем необходимо для описания их применения в данном примере. Кроме того, уменьшая число шагов процесса, применение принципа доминирования пропорционально этому уменьшает и объем вычислений, требуемый для получения решения. Условия (4.33) основаны на неформальном подходе, поэтому возникает вопрос о том, как повлияет вводимое правило на конечный результат и сокращение объема вычислений. Некоторые объяснения может дать рассматриваемый тестовый пример.

Если отказаться от применения принципа доминирования и на втором шаге процесса в качестве исходного цикла для очередного шага ($t=3$) процесса взять вариант, соответствующий минимальному значению удельных энергозатрат (табл. 37, строка 13), то процесс продолжится. Для этого случая в табл. 38 приведены результаты дальнейших расчетов. Текущие пробные циклы (табл. 38, графа 4) улучшены на основе проверки *второго необходимого условия оптимальности* для повторяющихся элементов. Элементы, которые согласно этому условию должны быть удалены для улучшения решения, отмечены справа точками. Значения энергозатрат (4.1) и удельных энергозатрат (4.17) вычислены для улучшенных вариантов (табл. 38, графы 5 и 7).

Примечание. На шаге $t=3$ также можно было бы воспользоваться условиями доминирования (4.33) и получить оптимальное решение (строка 21).

Выбирая цикл с минимальными удельными энергозатратами $\varepsilon^3(4;5)=86$, выполняем последний шаг процесса, в результате которого получаем все то же решение. Однако следует отметить, что если на втором шаге оптимальное решение было получено с использованием условий доминирования (табл. 37, строка 12), то без использования условий доминирования такое же решение было получено только на шаге $t=4$ и после улучшения его на основе проверки второго необходимого условия

оптимальности (табл. 38, строки 25 – 28). Объем вычислений при отказе от использования условий доминирования увеличился примерно вдвое.

Рассмотренный тестовый пример иллюстрирует достаточно высокую эффективность указанных методов. Это обусловлено тем, что для формирования решения и в методах **расширения** текущего цикла, и в методах последовательного **наращивания** решения, как правило, используются кратчайшие маршруты. Оптимизация по критерию длины цикла (табл. 39, строки 1 – 4) обеспечила точное решение данного примера только при использовании модифицированного метода расширения цикла. В двух случаях (строки 1; 3) погрешность равнялась 5 % и после улучшения решения в ходе проверки необходимых условий оптимальности снизилась до 2,4 %.

Таблица 38. Динамика процесса решения тестового примера обобщенной задачи коммивояжера модифицированным методом решения цикла

| $t = 3, G^3 = \{3;5\}, \mu_1^2 = \langle 1,2,6,4,1 \rangle, \mathcal{E}_1^2 = 78$ | | | | | | | | |
|--|-----|----------|----------------|----------------------|----------------------------|------------------|----------------------------|-------|
| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| | r | γ | j^{r-1}, j^r | $\mu_1^t(r, \gamma)$ | $\mathcal{E}^t(r, \gamma)$ | $n^t(r, \gamma)$ | $\varepsilon^t(r, \gamma)$ | G^t |
| 15 | 1 | 3 | 1;2 | 1,4,5,3,2,6,4,1 | 513 | 2 | 217,5 | ∅ |
| 16 | 1 | 5 | 1;2 | 1,4,5,4,1,2,6,4,1 | 433 | 1 | 355,5 | 3 |
| 17 | 2 | 3 | 2;6 | 1,2,3,2,6,4,1 | 317 | 1 | 239,5 | 5 |
| 18 | 2 | 5 | 2;6 | 1,2,6,4,5,6,4,1 | 164 | 1 | 86,0 | 3 |
| 19 | 3 | 3 | 6;4 | 1,2,6,4,5,3,4,1 | 263 | 2 | 92,5 | ∅ |
| 20 | 3 | 5 | 6;4 | 1,2,6,4,5,4,3,1 | 268 | 2 | 95,0 | ∅ |
| 21 | 4 | 3 | 4;1 | 1,2,6,4,5,3,4,1 | 263 | 2 | 92,5 | ∅ |
| 22 | 4 | 5 | 4;1 | 1,2,6,4,5,4,1 | 164 | 1 | 86,0 | 3 |
| $t = 4, G^4 = \{3\}, \mu_1^3 = \langle 1,2,6,4,5,4,1 \rangle, \mathcal{E}_1^3 = 164$ | | | | | | | | |
| 23 | 1 | 3 | 1;2 | 1,4,5,3,2,6,4,5,4,1 | 513 | 1 | 349 | ∅ |
| 24 | 2 | 3 | 2;6 | 1,2,3,2,6,4,5,4,1 | 720 | 1 | 556 | ∅ |
| 25 | 3 | 3 | 6;4 | 1,2,6,4,5,3,4,5,4,1 | 263 | 1 | 99 | ∅ |
| 26 | 4 | 3 | 4;5 | 1,2,6,4,5,3,4,5,4,1 | 263 | 1 | 99 | ∅ |
| 27 | 5 | 3 | 5;4 | 1,2,6,4,5,4,5,3,4,1 | 263 | 1 | 99 | ∅ |
| 28 | 6 | 3 | 4;1 | 1,2,6,4,5,4,5,3,4,1 | 263 | 1 | 99 | ∅ |

| № п/п | Метод | КО | Решение μ_1 | L | \mathcal{E} | НОУ-1 | НОУ-2 | Улучшенное решение | L^y | \mathcal{E}^y |
|----------|---------------|------------------|-----------------|-----|---------------|-------|-------|-----------------------|-------|-----------------|
| 1 | МРЦ (КЗК) | L | 1,2,6,5,3,4,1 | 43 | 279 | + | – | 1,2,6,4,5,3,4,1 | 42 | 263 |
| 2 | ММРЦ (КЗК) | L | 1,4,5,3,2,6,1 | 41 | 513 | – | + | 1,4,5,3,2,6,1 | 41 | 513 |
| 3 | КМРЦ (КЗК) | $L(\varepsilon)$ | 1,2,6,4,5,3,4,1 | 42 | 263 | – | + | 1,2,6,4,5,3,4,1 | 42 | 263 |
| 4 | МПНЦ (КЗК) | $L(\varepsilon)$ | 1,2,6,4,5,3,4,1 | 42 | 263 | – | + | 1,2,6,4,5,3,4,1 | 42 | 263 |
| 5 | МПНЦ (ОЗК) | $\mathcal{E}(a)$ | 1,2,6,4,5,3,4,1 | 42 | 263 | – | + | 1,2,6,4,5,3,4,1 | 42 | 263 |
| 6 | МПНЦ (ОЗК) | \mathcal{E} | 1,2,6,4,5,3,4,1 | 43 | 319 | + | – | 1,2,6,4,5,3,4,1 | 42 | 263 |
| 7 | МРЦ (ОЗК) | \mathcal{E} | 1,2,6,5,3,4,1 | 43 | 319 | + | + | 1,2,6,4,5,3,4,1 | 42 | 263 |
| 8 | ММРЦ (ОЗК) | L | 1,2,6,5,3,4,1 | 43 | 319 | + | + | 1,2,6,4,5,3,4,1 | 42 | 263 |

Примечание. КЗК – классическая задача коммивояжера; ОЗК – обобщенная задача коммивояжера; МРЦ – метод расширения цикла; ММРЦ – модифицированный МРЦ; КМРЦ – комбинированный МРЦ; МПНЦ – метод последовательного наращивания цикла; $L(\varepsilon)$ – длина цикла (упорядочение по ε); $\mathcal{E}(a)$ – энергозатраты (4.1) (упорядочение по весам грузов); НОУ-1 – первое необходимое условие оптимальности; НОУ-2 – второе необходимое условие оптимальности; КО – критерий оптимизации.

Оптимизация по критерию энергозатрат во всех случаях (строки 5 – 8) обеспечила оптимальное решение, что, однако, не является гарантией того, оптимальности решения для любых вариантов исходной информации c и a .

В вычислительном плане наиболее удобными можно считать методы последовательного наращивания цикла, для использования которых требуется иметь матрицу кратчайших маршрутов. Впрочем, такая матрица необходима и для решения задачи другими методами, кроме немодифицированного метода расширения цикла.

Выводы

1. Все четыре метода минимизации длины пути коммивояжера (табл. 39, строки 1 – 4) обеспечивают решения, близкие к оптимальному. Модифицированный метод расширения цикла дал точное решение. Проверка необходимых условий оптимальности позволила вдвое снизить погрешность решений (строки 1 и 3).

2. Рассмотренные методы минимизации энергозатрат (строки 5 – 8) после улучшения решений на основе проверки необходимых условий оптимальности обеспечили получение оптимальных решений.

3. Решение, оптимальное по критерию длины цикла (табл. 39, строка 2), при незначительном увеличении пути коммивояжера ($< 2,5\%$, строка 5) вдвое увеличивает его энергозатраты.

4. Методом последовательного наращивания цикла (табл. 39, строка 5) получено решение тестового примера, заимствованного из [17]. Длина пути более чем на 4 % меньше, чем в [17]. Уменьшение длины пути получено за счёт ослабления ограничения об *однократности* посещения каждого пункта (в пункте $j = 4$ коммивояжер побывал дважды). Отказ от указанного жесткого ограничения неизбежен, если матрица расстояний c не является полной ($\varphi < 1$). О возможности получения решения при $\varphi < 1$ в [17] информация отсутствует.

6. ПРОПУСКНАЯ СПОСОБНОСТЬ СЕТИ

6.1. Построение маршрута с максимальной пропускной способностью методом улучшения оценок

Исходной информацией в задаче о пропускной способности является граф $G = (A, M)$ с $n = |A|$ вершинами и $m = |M|$ дугами. Для постановки и решения задачи используется задание графа в виде *взвешенной матрицы пропускных способностей* $c = \|c_{i,j}\|$, где $c_{i,j}$ – вес дуги (i, j) . Если в

физическом плане величина $c_{i,j}$ означала ранее длину дуги (i,j) , то теперь $c_{i,j}$ будет означать *пропускную способность дуги (i,j)* , определяемую наиболее узким местом этой дуги. Например, на участке (i,j) транспортной сети имеется мост через реку, способный в час пропустить $c_{i,j}$ транспортных единиц. Это определяет максимальную пропускную способность и всего участка (i,j) , исключаящую возможность образования очереди в этом наиболее узком месте. Поскольку любой маршрут $\mu_{k,l}$ образуется последовательным соединением дуг, то наибольшая пропускная способность маршрута $\mu_{k,l}$, исключаящая образование очереди, будет равна пропускной способности дуги, являющейся наиболее *узким участком* маршрута:

$$\pi(\mu_{k,l}) = \pi_{k,l} = \min_{(i,j) \in \mu_{k,l}} \{c_{i,j}\} = c_{i_k, j_l},$$

где через $\pi_{k,l}$ обозначена пропускная способность маршрута $\mu_{k,l}$, как минимальный элемент $c_{i,j}$ из всех дуг (i,j) , образующих маршрут $\mu_{k,l}$; (i_k, j_l) – критическая дуга маршрута.

Формальная постановка задачи построения маршрута (их множества), обладающего максимальной пропускной способностью, в комбинаторном виде запишется:

$$\pi_{k,l} = \min_{(i,j) \in \mu_{k,l}} \{c_{ij}\} \rightarrow \max_{\mu_{k,l}}, \quad (6.1)$$

$$\mu_{k,l} \in \{\mu_{k,l}\}.$$

Из всего множества возможных маршрутов от вершины A_k до вершины A_l требуется построить такой маршрут $\mu_{k,l}^0$ (оптимальный), пропускная способность которого *максимальна* (6.1).

В основу метода построения оптимального маршрута и определения соответствующей ему максимальной пропускной способности $\pi_{k,l}^0 = \pi(\mu_{k,l}^0)$ положено достаточно очевидное утверждение, вытекающее из определения оптимального маршрута: *если маршрут $\mu_{k,l}^0$ оптимален и его пропускная способность равна $\pi_{k,l}^0$, то не существует маршрута из пункта A_k в пункт A_l , имеющего большую пропускную способность ($\pi_{k,l} > \pi_{k,l}^0$)*.

Суть метода последовательного улучшения оценок $\pi_{k,l}^t$ искомой пропускной способности $\pi_{k,l}^0$ ($\pi_{k,l}^t \geq \pi_{k,l}^0$, $t=1,2,\dots$) состоит в следующем.

По некоторому правилу определяется начальная оценка $\pi_{k,l}^1 \geq \pi_{k,l}^0$, и все элементы $c_{ij} < \pi_{k,l}^1$ матрицы c удаляются из неё (или игнорируются при расчётах). Далее из пункта A_k делается попытка построения маршрутов к пункту A_l . Если хотя бы один такой маршрут построить удалось, то он и является оптимальным, при этом $\pi_{k,l}^0 = \pi_{k,l}^1$.

Если маршрута от A_k к A_l не существует, то берется новая, улучшенная оценка $\pi_{k,l}^2 < \pi_{k,l}^1$. Далее снова делается попытка построить маршрут $\mu_{k,l}$, вероятность ее успеха велика, поскольку возрастает количество «рабочих» элементов $c_{i,j} \geq \pi_{k,l}^2$. Если маршрут до пункта A_l построен, то процесс окончен, иначе берется новая оценка $\pi_{k,l}^{t+1} < \pi_{k,l}^t$, и так далее, пока не будет получено решение.

Для формулировки достаточно эффективного алгоритма решения задачи необходимо предусмотреть возможность выбора эффективной начальной оценки $\pi_{k,l}^1$ и сокращения до минимума числа промежуточных оценок. Для решения указанных вопросов и уяснения деталей метода улучшения оценок рассмотрим числовой пример построения оптимального маршрута из пункта A_5 ($k=5$) в пункт A_3 ($l=3$), (табл. 40).

Начальная дуга искомого маршрута $\mu_{k,l}^0 = \mu_{5,3}^0$ не может иметь (табл. 40, строка $k=5$) пропускную способность большую, чем максимальный элемент *начальной дуги* (строка $k=5$), равный 28 ед. Пропускная способность всего маршрута также не может быть больше, чем пропускная способность *конечной дуги* маршрута, наибольшее возможное значение которой равно $c_{4,3} = 30$ ед. (столбец $l=3$). Следовательно, в качестве начальной оценки (сверху) $\pi_{k,l}^1$ максимальной пропускной способности может быть выбрано меньшее из этих двух чисел:

$$\pi_{k,l}^1 = \min \left\{ \max_j c_{k,j}; \max_i c_{i,l} \right\} = \min \{28; 30\} = 28. \quad (6.2)$$

Для полученной оценки делается попытка построить маршрут $\mu_{k,l}^0$, при этом элементы $c_{ij} < \pi_{5,3}^1$ матрицы c не используются. На основе оценки $\pi_{5,3}^1 = 28$ удалось построить маршрут $\mu_{5,j}^t$ (табл. 40):

$$t=1: \textcircled{5} \xrightarrow[28]{\textcircled{2}} \blacktriangleright \Rightarrow \mu_{5,2}^1 = \mu(\pi_{k,l}^1) = \langle 5;2 \rangle, (j^1 = 2) \neq l = 3, \quad (6.3)$$

где в кружках записаны номера вершин; под дугой указана её пропускная способность $c_{5,2} = 28$; \blacktriangleright – знак прекращения процесса; j^t – номер конечной вершины (пункта) маршрута, полученного при оценке $\pi_{5,3}^1$.

Поскольку при данной оценке маршрута $\mu_{k,l}^t$ не существует, то необходимо улучшить оценку, уменьшив её значение.

Так как значения оценок принадлежат множеству значащих элементов матрицы \mathbf{c} , то в качестве новой оценки $\pi_{k,l}^{t+1}$ можно взять элемент $c_{ij} < \pi_{k,l}^t$, ближайший к $\pi_{k,l}^t$. В данном случае в качестве такой оценки следовало бы взять $\pi_{5,3}^2 = c_{2,5} = 27$, однако путём построения маршрутов можно убедиться, что при оценках $\pi_{6,2}^2 = \{27 \div 24\}$ маршрута, отличного от (6.3), получено не будет. Для задач больших размеров это может привести к существенному увеличению объема вычислений, поэтому рассмотрим более эффективный подход к определению очередной оценки, существенно уменьшающий число итераций.

Поскольку уменьшение оценки $\pi_{k,l}^t$ ведет к увеличению количества «рабочих» элементов, то необходимо обеспечить их появление, прежде всего в строках матрицы \mathbf{c} , номера которых соответствуют элементам построенного на основе оценки $\pi_{5,3}^1$ маршрута. Это обеспечит возможность продления маршрута и его разветвления, увеличивая при этом вероятность достижения нужного пункта $l=3$. В рассматриваемом примере новую оценку $\pi_{5,3}^2$ следует искать в строках, номера которых i образуют построенный маршрут

$$I^t = \{i \mid i \in \mu_{k,j^t}^t\}, \quad I^1 = \{5;2\}$$

в соответствии с формулой

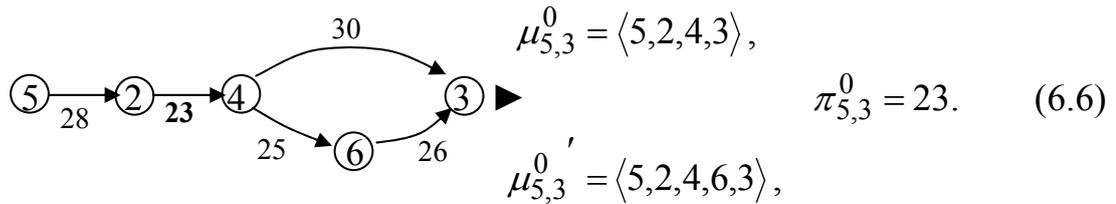
$$\pi_{k,l}^{t+1} = \max_{i \in I^t} \{ \max_{j \in \bar{I}^t} \{c_{ij}\} \}, \quad \bar{I}^t = I \setminus I^t, \quad I = \{i = \overline{1;n}\}, \quad (6.4)$$

где \bar{I}^t – дополнение к множеству I^t ; I – полное множество индексов.

Для оценки $\pi_{5,3}^2$ согласно (6.4) из табл. 40 имеем

$$\pi_{5,3}^2 = \max_i \{ \max_{i=5} \{ \mathbf{20, 2, 13, 17} \}; \max_{i=2} \{ 12, 22, \mathbf{23}, 3 \} \} = \max \{ 20, 23 \} = 23, i \in I^1. \quad (6.5)$$

Игнорируя в матрице \mathbf{c} элементы $c_{ij} < \pi_{5,3}^2 = 23$, от пункта A_5 строится маршрут по новой оценке:



Поскольку конечной элемент полученного маршрута ($j^2 = 3$) совпал с заданным ($l = 3$), то решение получено и записано в табл. 41, где в совмещенной матрице помещены и другие оптимальные решения ($k, l = \overline{1, n}$).

В оптимальности решения можно убедиться, проверив **невозможность построения маршрута от A_5 до A_3 при ближайшей** (завышенной по сравнению с $\pi_{5,3}^2$) **оценке $\pi_{k,l} = 24$** (элементы $c_{ij} \geq 24$ в табл. 40 выделены шрифтом).

Рассмотренный метод определения улучшенной оценки позволил вместо пяти итераций обойтись одной.

Таблица 40. $\mathbf{c} = \| c_{ij} \|, \varphi = 1$

| $i \backslash j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|----|-----------|-----------|----|-----------|-----------|
| 1 | | 1 | 16 | 5 | 22 | 9 |
| 2 | 12 | | 22 | 23 | 27 | 3 |
| 3 | 23 | 18 | | 14 | 24 | 29 |
| 4 | 4 | 8 | 30 | | 7 | 25 |
| 5 | 20 | 28 | 2 | 13 | | 17 |
| 6 | 6 | 15 | 26 | 11 | 19 | |

Таблица 41. Совмещенная матрица $\left\| \begin{array}{c} \mu_{kl}^0 \\ \pi_{kl}^0 \end{array} \right\|$

| | $j=1$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-------|---------------------------------|----------------------|-----------------------------|----------------------|--------------------|-------------------------------|
| $i=1$ | | $\frac{1,5,2}{22}$ | $\frac{1,5,2,3}{22}$ | $\frac{1,5,2,4}{22}$ | $\frac{1,5}{22}$ | $\frac{1,5,2,4,6}{1,5,2,3,6}$ |
| 2 | $\frac{2,4,6,3,1}{2,4,3,1}$ | | $\frac{2,4;3}{23}$ | $\frac{2,4}{23}$ | $\frac{2,5}{27}$ | $\frac{2,4,3,6}{2,4,6}$ |
| 3 | $\frac{3,1}{23}$ | $\frac{3,5,2}{24}$ | | $\frac{3,5,2,4}{23}$ | $\frac{3,5}{24}$ | $\frac{3,6}{29}$ |
| 4 | $\frac{4,3,1}{23}$ | $\frac{4,3,5,2}{24}$ | $\frac{4,3}{30}$ | | $\frac{4,3,5}{24}$ | $\frac{4,3,6}{29}$ |
| 5 | $\frac{5,2,4,6,3,1}{5,2,4,3,1}$ | $\frac{5,2}{28}$ | $\frac{5,2,4,6,3}{5,2,4,3}$ | $\frac{5,2,4}{23}$ | | $\frac{5,2,4,6}{23}$ |
| 6 | $\frac{6,3,1}{23}$ | $\frac{6,3,5,2}{24}$ | $\frac{6,3}{26}$ | $\frac{6,3,5,4}{23}$ | $\frac{6,3,5}{24}$ | |

Блок-схема алгоритма построения оптимального маршрута представлена на рис. 6. Получение начальной и улучшенной оценок $(2^0; 5^0)$ соответственно проиллюстрировано числовым примером [см. (6.2), (6.5)]. Любой из двух полученных маршрутов (6.6) способен пропустить поток с плотностью λ , не превышающей пропускную способность маршрута $\pi_{k,l}^0$ ($\lambda \leq \pi_{k,l}^0$). Для выбора одного из множества оптимальных маршрутов лицо, принимающее решение, (ЛПР) может использовать какую-то дополнительную информацию, например, длину маршрута и т.п.

Если реальный поток с плотностью λ превышает пропускную способность маршрута, то по маршруту может быть пропущена только часть потока. Оставшаяся часть $\lambda - \pi_{k,l}^0$ может быть направлена от пункта A_k к A_l по другим маршрутам, при этом могут использоваться и участки (дуги (i, j)) уже построенного маршрута, пропускная способность которых использована неполностью ($c_{ij} > \pi_{k,l}^0$). Это позволит увеличить общую пропускную способность от пункта A_k к A_l , т.е. пропускную способность сети.

6.2. Определение максимальной пропускной способности сети

Идея определения суммарной максимальной пропускной способности сети $\pi_{k,l}^{0,\Sigma}$ состоит в следующем.

После построения первого оптимального маршрута $\mu_{k,l}^{0,1}$ из пропускных способностей $c_{i,j}$ дуг, вошедших в этот маршрут, вычитается пропускная способность $\pi_{k,l}^0$. Полученная таким путём *остаточная матрица* \mathbf{c}^2 является исходной информацией для определения очередного оптимального маршрута. При этом естественно, что пропускная способность нового маршрута будет **не больше**, чем у предыдущего ($\pi_{k,l}^{0,r+1} \leq \pi_{k,l}^{0,r}$). Процесс оканчивается при получении остаточной матрицы \mathbf{c}^r , уже не позволяющей построить маршрут от пункта A_k к пункту A_l .

Далее будем использовать обозначение номера **большой итерации** r . Например, \mathbf{c}^r – матрица пропускных способностей, используемая на r -й большой итерации (при $r=1$ $\mathbf{c}^1 = \mathbf{c}$ – начальная матрица, при $r > 1$ – остаточные); $\mu_{k,l}^{0,r}$, $\pi_{k,l}^{0,r}$ – оптимальный маршрут и его пропускная способность, полученные на r -й большой итерации; t – номер **малой итерации (шага)**; $\pi_{k,l}^{t,r}$ – значение оценки для $\pi_{k,l}^{0,r}$ на t -м шаге r -й большой итерации и т.д.

Большая итерация от малой отличается тем, что дополнительно к алгоритму (рис. 6) вначале *вычисляются элементы остаточной матрицы* \mathbf{c}^{r+1} на основании полученного маршрута $\mu_{k,l}^{0,r}$ и матрицы \mathbf{c}^r по формуле

$$\tilde{n}_{i,j}^{r+1} = \begin{cases} \tilde{n}_{i,j}^r, & (i,j) \notin \mu_{k,l}^{0,r}, \\ \tilde{n}_{i,j}^r - \pi_{k,l}^{0,r}, & (i,j) \in \mu_{k,l}^{0,r}. \end{cases} \quad (6.7)$$

Порядок решения проиллюстрируем на примере сети, представленной в табл. 40, при определении её максимальной пропускной способности $\pi_{k,l}^{0,\Sigma}$ от пункта A_k к A_l как суммы пропускных способностей всех R возможных оптимальных маршрутов $\mu_{k,l}^{0,r}$ ($r = \overline{1;R}$):

$$\pi_{k,l}^{0,\Sigma} = \sum_{r=1}^R \pi_{k,l}^{0,r}. \quad (6.8)$$

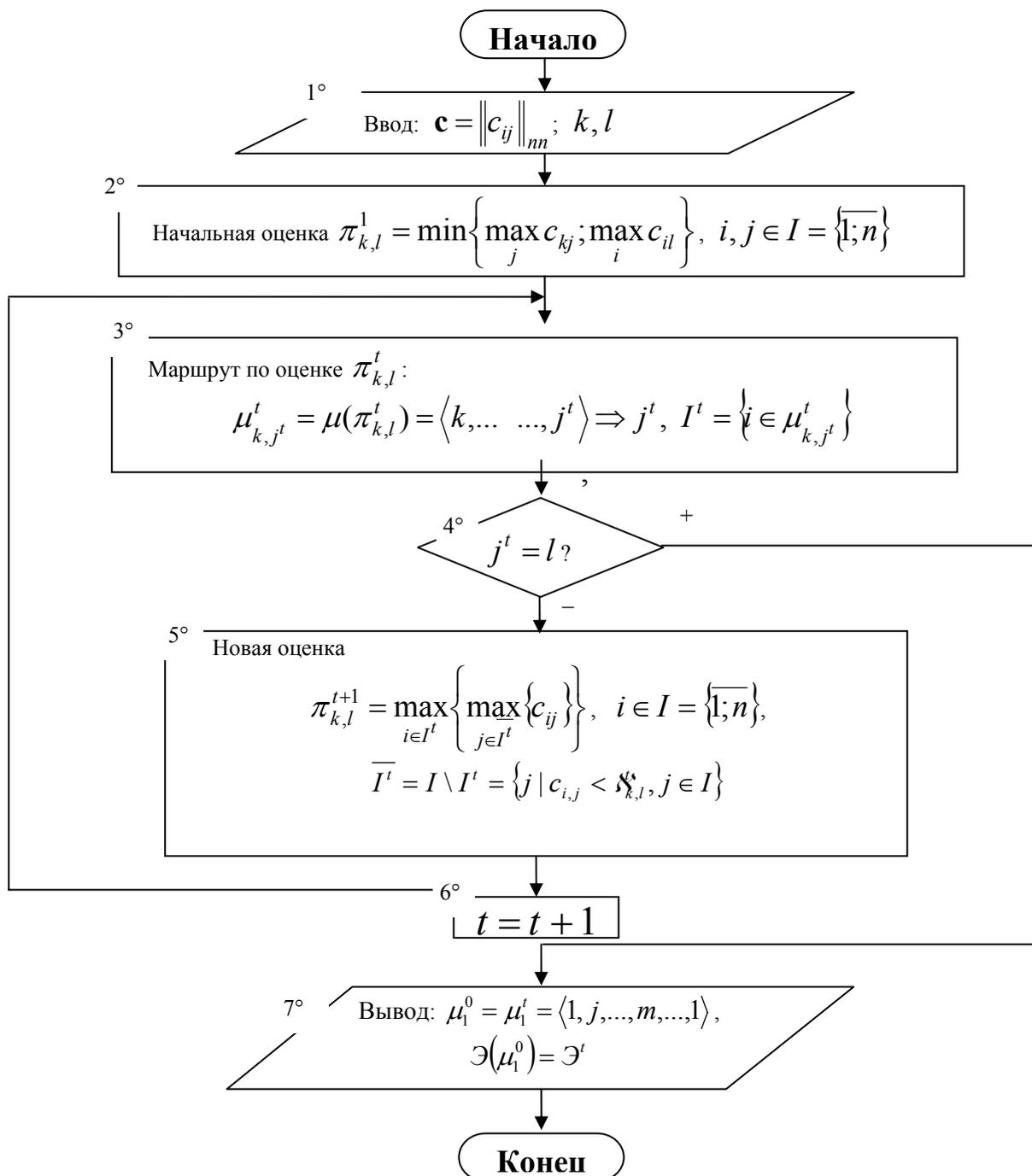


Рис. 6. Блок-схема алгоритма метода улучшения оценок

В ходе первой итерации был получен маршрут $\mu_{k,l}^{0,1}$ ($r=1$, $k=5$, $l=3$, см. (6.9)):

$$\mu_{5,3}^{0,1} = \langle 5,2,4,3 \rangle, \quad \pi_{5,3}^{0,1} = 23.$$

Итерация $r=2$ начинается с получения остаточной матрицы \mathbf{c}^2 после пересчёта элементов матрицы \mathbf{c}^1 . Согласно (6.7) и табл. 40 имеем

$$c_{5,2}^2 = c_{5,2}^1 - \pi_{5,3}^{0,1} = 28 - 23 = 5, \quad c_{2,4}^2 = 23 - 23 = 0, \quad c_{4,3}^2 = 30 - 23 = 7.$$

В табл. 42 пересчитанные элементы выделены жирным шрифтом. Элементы $c_{i,j}^2$ остаточной матрицы \mathbf{c}^2 записаны в клетках и сверху над чертой в клетках табл. 42. Дальнейшие вычисления для $r=2$ записаны справа от табл. 42.

На второй итерации ($r=2$) после двух шагов (рис. 6, $2^0 - 5^0$) найден второй маршрут от A_5 до A_3 с пропускной способностью 17 ед.:

$$\mu_{5,3}^{0,2} = \langle 5,6,3 \rangle, \quad \pi_{5,3}^{0,2} = 17. \quad (6.9)$$

На основании (6.9) и \mathbf{c}^2 вычисляется новая остаточная матрица \mathbf{c}^3 . Изменившиеся согласно (6.7) элементы ($c_{5,6}$, $c_{6,3}$) записаны внизу клеток курсивом (табл. 42).

Начальная оценка при остаточной матрице \mathbf{c}^3 *не может быть больше пропускной способности предыдущего маршрута*:

$$\pi_{k,l}^{1,r} \leq \pi_{k,l}^{0,r-1}, \quad (6.10)$$

поэтому в строке $i=k=5$ и в столбце $j=l=3$ остаточной матрицы \mathbf{c}^3 выбираются ближайшие к пропускной способности предыдущего оптимального маршрута $\pi_{5,3}^{0,2}$ элементы $c_{5,j}$, $c_{i,3}$ (но не большие её), и больший из них назначается в качестве начальной оценки ($t=1$):

$$\pi_{5,3}^{1,3} = \max\{13;16\} = 16.$$

Полученный при этом оптимальный маршрут $\mu_{5,3}^{0,3} = \langle 5,1,3 \rangle$ и его

пропускная способность $\pi_{5,3}^{0,3}$ позволяют получить очередную остаточную матрицу c^4 , записанную в табл. 43.

Примечание. Начальная оценка $\pi_{5,3}^{1,4}$ может быть получена и прежним способом (6.2), при этом, учитывая (6.10), оценку следует улучшить:

$$\pi_{k,l}^{1,r} = \min \{ \max_j c_{k,j}^r; \max_i c_{i,l}^r; \pi_{k,l}^{0,r-1} \}. \quad (6.11)$$

Справа от табл. 43 записаны начальная оценка $\pi_{5,3}^{1,4}$, полученная двумя способами, и построенный на её основе маршрут, оказавшийся оптимальным, $\mu_{5,3}^{0,4}$.

Полученные согласно (6.7) элементы остаточной матрицы $c_{5,3}^5$ записаны в табл. 43, при этом элементы c_{ij}^4 , изменившие свои значения, записаны жирным шрифтом (под чертой).

Для c^5 ($r=5$) начальная оценка (6.11) и оптимальный маршрут записаны справа от табл. 43 (рис. 7).

Далее приведена динамика процесса решения.

Таблица 42

| | | c^2 c^3 | | | | | | | | |
|---|----|-------------|----------------|----------|----|----------------|--|--|--|--|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | | | |
| | | | | | | | | r = 2 | | |
| | | | | | | | | $t = 1 : \pi_{5,3}^{1,2} = \min\{20;26\} = 20, \Rightarrow$ $\Rightarrow 5 \xrightarrow{20} 1 \blacktriangleright \Rightarrow I^{t,r} = I^{1,2} = \{5;1\},$ | | |
| 1 | | 1 | 16 | 5 | 22 | 9 | | | | |
| 2 | 12 | | 22 | 0 | 27 | 3 | $t = 2 : \pi_{5,3}^{2,2} = \max\{17;16\} = 17 \Rightarrow$ $\quad \quad \quad 20 \quad 1 \blacktriangleright$ $\Rightarrow 5 \quad \quad \quad 3 \blacktriangleright \Rightarrow \mu_{5,3}^{0,2} = \langle 5,6,3 \rangle, \pi_{5,3}^{0,2} = 17.$ | | | |
| 3 | 23 | 18 | | 14 | 24 | 29 | | | | |
| 4 | 4 | 8 | 7 | | 7 | 25 | $\quad \quad \quad 17 \quad 6 \quad 26$ | | | |
| 5 | 20 | 5 | 2 | 13 | | $\frac{17}{0}$ | r = 3 | | | |
| 6 | 6 | 15 | $\frac{26}{9}$ | 11 | 19 | | $t = 2 : \pi_{5,3}^{1,3} = \max\{13;16\} = 16 < \pi_{5,3}^{0,2} \Rightarrow$ $\Rightarrow 5 \xrightarrow{20} 1 \xrightarrow{16} 3 \blacktriangleright \Rightarrow \mu_{5,3}^{0,3} = \langle 5,1,3 \rangle, \pi_{5,3}^{0,3} = 16.$ | | | |
| | | | | | | | | 20 16 | | |

Таблица 43

| | c^4 | c^5 | | | | |
|---|-------|----------------|----------------|----------------|----|-----------------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | | 1 | | 5 | 22 | 9 |
| 2 | 12 | | $\frac{22}{9}$ | | 27 | 3 |
| 3 | 23 | 18 | | 14 | 24 | 29 |
| 4 | 4 | 8 | 7 | | 7 | $\frac{25}{12}$ |
| 5 | 4 | 5 | 2 | $\frac{13}{0}$ | | |
| 6 | 6 | $\frac{15}{2}$ | 9 | 11 | 19 | |

 $r = 4$

$$\pi_{5,3}^{1,4} = \max\{13; 9\} = \min\{13, 22, 16\} = 13$$

$$\Rightarrow 5 \xrightarrow{13} 4 \xrightarrow{25} 6 \xrightarrow{15} 2 \xrightarrow{22} 3 \blacktriangleright \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Rightarrow \mu_{5,3}^{0,4} = \langle 5, 4, 6, 2, 3 \rangle, \pi_{5,3}^{0,4} = 13.$$

 $r = 5$

$$\pi_{5,3}^{1,5} = \min\{5, 9, 13\} = 5. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \xrightarrow{5} 2 \xrightarrow{9} 3 \blacktriangleright \Rightarrow \mu_{5,3}^{05} = \langle 5, 2, 3 \rangle,$$

$$\pi_{5,3}^{05} = 5.$$

Таблица 44

| | c^6 | c^7 | c^8 | | | |
|---|-------|-------|-------|----|----|-------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | | 1 | | 5 | 22 | $9/5$ |
| 2 | 12 | | $9/4$ | | 27 | 3 |
| 3 | 23 | 18 | | 14 | 24 | 29 |
| 4 | 4 | 8 | 7 | | 7 | 12 |
| 5 | $4/0$ | $5/0$ | 2 | | | |
| 6 | 6 | 2 | $9/5$ | 11 | 19 | |

 $r = 6$

$$\pi_{5,3}^{1,6} = \min\{4, 9, 5\} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \xrightarrow{5} 1 \xrightarrow{4} 7 \xrightarrow{6} 9 \xrightarrow{9} 3 \blacktriangleright \Rightarrow \mu_{5,3}^{0,6} = \langle 5, 1, 4, 3 \rangle$$

$$\mu_{5,3}^{0,6} = \langle 5, 1, 6, 3 \rangle$$

$$\pi_{5,3}^{0,6} = 4.$$

 $r = 7$

$$\pi_{5,3}^{1,7} = \min\{2; 7; 4\} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \xrightarrow{2} 3 \blacktriangleright \Rightarrow \mu_{5,3}^{0,7} = \langle 5, 3 \rangle, \pi_{5,3}^{0,7} = 2.$$

 $r = 8$

$$\forall j : c_{5j}^8 = 0 - \text{конец.}$$

На итерации $r = 6$ после пересчёта получена матрица \mathbf{c}^6 , записанная в табл. 44 (c_{ij}^6 – над линиями). На итерации $r = 6$ получено два оптимальных маршрута, пропускная способность каждого из которых равна 4 ед. Однако совместно их использовать нельзя, т.к. они оба содержат общую критическую дугу $c_{5,1} = 4$.

При вычислении остаточной матрицы \mathbf{c}^7 использован второй маршрут (рис. 7), при этом изменившиеся элементы в табл. 43 выделены жирным шрифтом и записаны в нижней части клеток. На итерации $r = 7$ построен последний маршрут, завершающий *полное использование пропускных способностей пункта-источника* A_5 ($c_{5,j}^7 = 0$ для $\forall j$ и табл. 40):

$$\pi_5^H = \sum_{j=1}^n c_{5,j} = 20 + 28 + 2 + 13 + 17 = 80. \quad (6.12)$$

Всё множество маршрутов, обеспечивающих максимальную пропускную способность сети от пункта A_5 к пункту A_3 , представлено в табл. 45:

Таблица 45

| r | $\mu_{5,3}^{0,r}$ | $\pi_{5,3}^{0,r}$ |
|-----|-----------------------------|-------------------|
| 1 | $\langle 5,2,4,3 \rangle$ | 23 |
| 2 | $\langle 5,6,3 \rangle$ | 17 |
| 3 | $\langle 5,1,3 \rangle$ | 16 |
| 4 | $\langle 5,4,6,2,3 \rangle$ | 13 |
| 5 | $\langle 5,2,3 \rangle$ | 5 |
| 6 | $\langle 5,1,6,3 \rangle$ | 4 |
| 7 | $\langle 5;3 \rangle$ | 2 |

Из табл. 45 следует, что суммарная пропускная способность маршрутов (6.8) соответствует возможностям пункта-источника A_5 (6.12); можно установить маршруты, которые целесообразно задействовать, чтобы использовать их с *полной нагрузкой* для пропуски заданного потока с плотностью λ_k . Например, поток с плотностью $\lambda_{5,3} = 30$ ед. можно направить по маршрутам с номерами $\{r\} = \{2;4\}$ или $\{1,5,7\}$.

Требуемая пропускная способность любой дуги, используемой в различных маршрутах от A_k до A_l , должна соответствовать её начальным возможностям. К примеру, дуга (6;3) используется в маршрутах $\{r\} = \{2;6\}$, что требует от неё пропускной способности $c_{6,3} \geq 17 + 4 = 21$ ед. (табл. 45). Её начальная пропускная способность удовлетворяет (табл. 40) этому требованию ($c_{6,3} = 26$), при этом 5 ед. неиспользованной пропускной способности соответствуют полученному результату ($c_{6,3}^8 = 5$, табл. 44).

Из табл. 44 c^8 следует, что сумма неиспользованных пропускных способностей пункта-приёмника A_3 равна:

$$\sum_{i=1}^n c_{i,3}^8 = 4 + 7 + 5 = 16.$$

Сложив сумму неиспользованных пропускных способностей пункта-приёмника A_3 с найденной пропускной способностью сети от A_5 до A_3 (80 ед.), получим начальную пропускную способность пункта-приёмника (табл. 40):

$$\pi_{k,l}^n = \sum_{i=1}^n c_{il} = 16 + 22 + 30 + 2 + 26 = 96. \quad (6.13)$$

Используя (6.12) и (6.13), можно, не производя расчётов, получить **оценку сверху для пропускной способности сети** от источника A_k к приёмнику A_l :

$$\pi_{k,l}^{0,\Sigma} \leq \min \{ \pi_{k,l}^H; \pi_{k,l}^n \}.$$

Для рассмотренного примера оценка соответствует оптимальному решению.

Блок-схема алгоритма получения совокупности маршрутов, обеспечивающих максимальную пропускную способность сети, представлена на рис. 7, динамика его работы – в табл. 42 – 44. На восьмой итерации после вычисления элемента $c_{5,3}^8 = 0$ (пункт 5^0) выполняется *достаточное* условие останова (пункт 6^0), и процесс прекращается. Необходимое и достаточное условие останова состоит в невозможности построения маршрута $\mu_{k,l}$ при остаточной матрице c^{r+1} и любой оценке, меньшей или равной $\pi_{k,l}^{r+1}$.

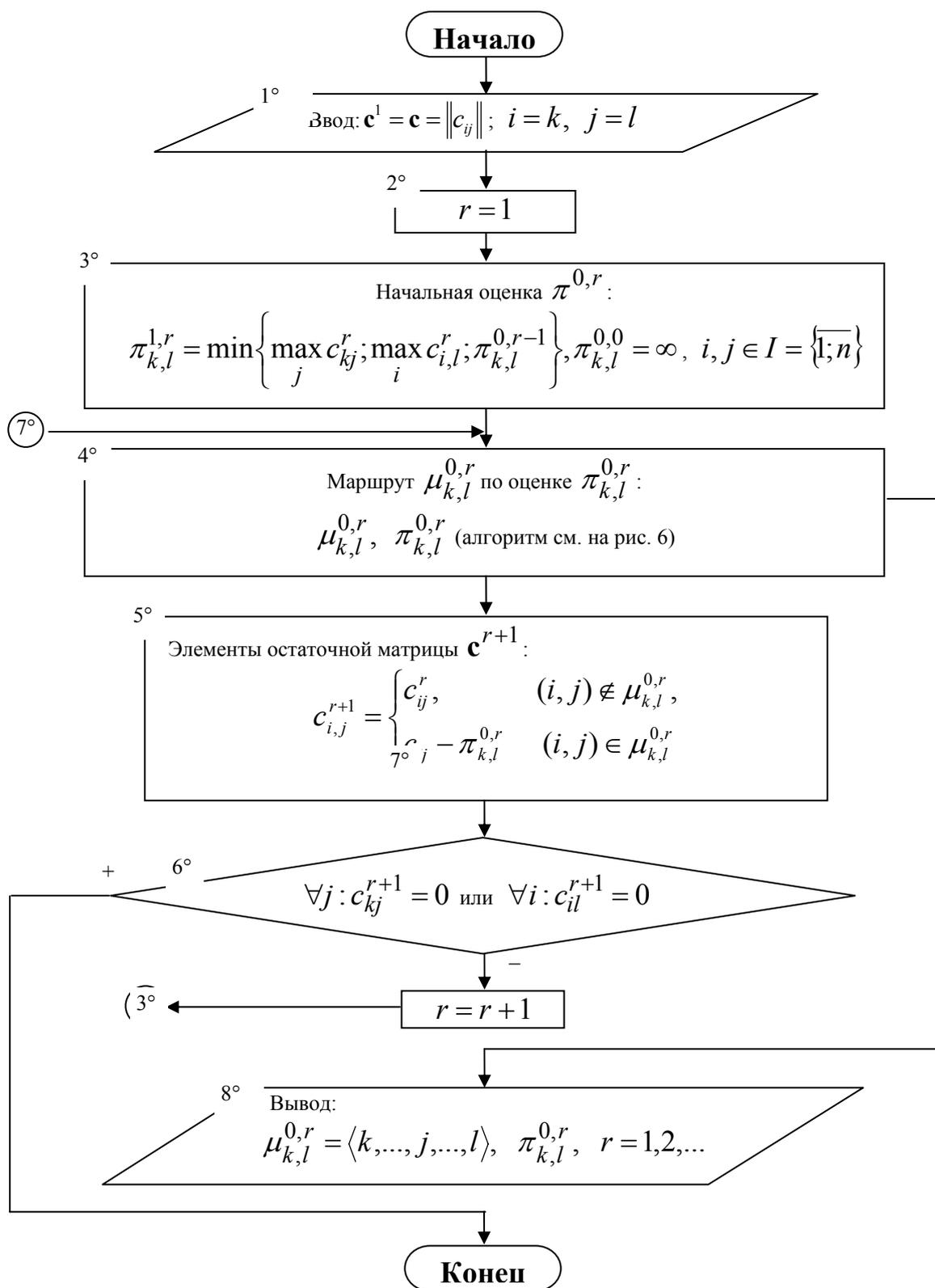


Рис. 7. Блок-схема алгоритма определения пропускной способности сети

Выводы

1. Алгоритм (рис. 6, пункты $3^0 - 5^0$) исключает возможность образования циклов при построении маршрута $\mu_{k,l}^0$, поэтому маршрут не может содержать более чем n элементов.

2. Исключение возможности образования циклов не может ухудшить решение: если критическая дуга находится только в цикле, то его исключение улучшит решение; если критическая дуга вне цикла – пропускная способность не изменится.

3. Наиболее известный и эффективный метод решения задачи о пропускной способности сети – метод Форда-Фалкерсона – основан на использовании *отрицательных плотностей потоков*. В [14, с. 549] приводится пример сети размера $n=4$, при этом решение указанным методом получается после выполнения 2 000 000 итераций. Метод улучшения оценок (рис. 6; 8) позволяет получить оптимальное решение указанного примера не более чем за две итерации (см. приложение). Попытки найти подобный контрпример, характеризующий неэффективную работу алгоритма улучшения оценок, оказались безуспешными.

4. Метод и алгоритм решения не зависят от коэффициента полноты матрицы c ($0 < \varphi \leq 1$). При построении маршрута по оценке $\pi_{k,l}^t$ (рис. 6, 3^0) может быть использован алгоритм эстафетного метода (рис. 2), т.к. наличие хотя бы одного маршрута от пункта A_k к пункту A_l гарантирует и наличие кратчайшего для суммы весов $c_{i,j}$ дуг $(i,j) \in \mu_{k,l}^0$.

5. Определение пропускных способностей сетей проводилось с допущением, что циркулирующие в них потоки близки к детерминированным. Если потоки случайны и в узлах (вершинах) производится их обработка (например, информационные потоки), то для решения вопросов, связанных с пропускными способностями, возникает необходимость привлекать теорию массового обслуживания [16, 15, 3] и другие специальные методы.

7. ПОИСК ОСОБЫХ ТОЧЕК НА ГРАФЕ

7.1. Поиск точек с минимальной суммарной длиной маршрутов

Под *особой точкой* на графе будем иметь в виду точку, расположенную в вершине или на ребре (дуге) графа и удовлетворяющую заданным требованиям. Подобные требования возникают при решении различных практических задач. Например, интерес может представлять выбор места размещения базы (склада), сумма расстояний от которой до n потребителей будет минимальной. При этом, как правило, возникает необходимость учета существующей дорожной сети, потребностей клиентов (ожидаемые грузопотоки) и прочих факторов.

Другой класс задач подобного рода связан с выбором таких точек и их количества, при которых время достижения любого пункта на графе не будет превышать заданной величины (размещение пунктов скорой помощи, пожарных команд и т.д.).

Список подобного рода задач, возникающих на практике, можно найти в [2,14], а также ознакомиться с некоторыми подходами к их решению.

Рассмотрим решение некоторых **минисуммных** задач [2], простейшую из которых можно представить как поиск точки x на графе, сумма расстояний от которой до каждой из вершин графа минимальна. Формальную постановку такой задачи можно записать в виде

$$L^{\Sigma}(x, R) = \sum_{j=1}^n \mu_{x,j}^0 \rightarrow \min_{\mathcal{D}}, \quad (7.1)$$

$$x \in G(A, M), \quad (R = 1), \quad (7.2)$$

где точка x лежит на одной из вершин или граней графа G ; $\mu_{x,j}^0$ – кратчайший маршрут от точки x до точки A_j ; $L_{x,j}^0 = L(\mu_{x,j}^0)$ – длина маршрута $\mu_{x,j}^0$; R – заданное количество точек.

В основу решения положен **метод перемещений** [18]. Суть метода заключается в следующем.

Смещение точки x на величину Δx в одном направлении (точка x лежит на грани графа G) приводит к **увеличению** длин маршрутов к каждому из некоторой совокупности n_1 пунктов и к **уменьшению** длин n_2 маршрутов к остальным $n_2 = n - n_1$ пунктам (вершинам графа). Если при этом

$$\Delta x \cdot n_2 > \Delta x \cdot n_1, \quad (n_2 > n_1), \quad (7.3)$$

то смещение точки x , в силу линейного характера (7.3), *следует продолжить в том же направлении до ближайшей вершины графа*. При знаке $<$ в (7.3) точку x следует смещать в противоположном направлении до ближайшей вершины, что снова уменьшит суммарную длину маршрутов. Из достигнутой вершины снова даются пробные приращения Δx в каждом из возможных направлений, при этом значения n_1 и n_2 будут меняться, что в каждом случае определит и знак неравенства (7.3). Если для каждого возможного направления будет получено $n_2 < n_1$, то берется $\Delta x = 0$ – решение оптимально. При $n_2 = n_1$ вся соответствующая грань содержит оптимальные решения.

Поскольку решение, как правило, соответствует одной из вершин, то достаточно построить все множество кратчайших маршрутов (раздел 2) и начальную точку x разместить в любой из вершин A^k ($k = \overline{1, n}$). Далее точки x по каждой из дуг, исходящих из вершины A^k , смещаются на Δx . Если смещение точки x от вершины A^k по дуге (k, j) к вершине A_j , согласно (7.3), приводит к уменьшению суммы длин маршрутов, то точка x перемещается в вершину A_j . Процесс заканчивается, если смещение по дуге к любому смежному объекту ведет только к увеличению общей длины маршрутов (*условие локального минимума*). Порядок решения задачи (7.1), (7.2) проиллюстрируем на примере определения одной ($R = 1$) точки x и ориентированного графа, представляющего транспортную сеть (рис. 1).

На основе матричного представления сети (табл. 1) эстафетным методом (раздел 2) строится все множество кратчайших маршрутов, которое и представлено в табл. 46 (и табл. 9). Пусть в качестве исходного положения точки x взята вершина A^2 , которой соответствует сумма длин кратчайших маршрутов $L_2^\Sigma = 49$.

Из пункта A^2 возможен переход только к пункту A_3 , что видно из начальных дуг маршрутов, исходящих из пункта A^2 ($(k; j) = (2; 3)$, табл. 46, строка $k = 2$). При смещении точки x_1 в вершину A_3 суммарная длина маршрутов уменьшится до $L_3^\Sigma = 28$.

Из A^3 возможен переход к вершинам с номерами $\{1; 4\}$, но только смещение точки x в вершину A_4 обеспечит дальнейшее уменьшение суммы длин маршрутов ($L_1^\Sigma = 31$, $L_4^\Sigma = 26$, табл. 46). Дальнейший переход от вершины A^4 к A_6 или A_5 приведет только к увеличению суммарной длины маршрутов, следовательно, оптимальное размещение базы (точки x) соответствует пункту A_4 (рис. 1).

Рассмотренный пример позволяет предельно упростить процедуру поиска оптимальной точки x^0 : достаточно на основе совмещенной матрицы, согласно (7.4), вычислить суммарные длины маршрутов L_k^Σ , $(\overline{1,n})$; минимальной из этих длин будет соответствовать оптимальное положение точки x ($i = k^0$):

$$L_k^\Sigma = \sum_{j=1}^n L_{k,j}^0, \quad \min_{1 \leq k \leq n} \{L_k^\Sigma\} = L_{k^0}^\Sigma \Rightarrow A_{k^0}, \quad i = k^0, \quad (7.4)$$

где k^0 – номер пункта размещения базы.

Матрица кратчайших маршрутов для *неориентированного графа*, полученного из рис. 1 путем добавления дуг противоположного направления, представлена в табл. 47. Матрица c (табл. 1) при этом станет симметрической ($\forall(i,j): c_{i,j} = c_{j,i}$). Расширение возможностей транспортной сети позволило существенно сократить длины кратчайших маршрутов, однако оптимальное размещение базы осталось прежним.

Таблица 46. Совмещенная матрица (ориентированный граф) $\left\| \frac{\mu_{i,j}^0}{L_{i,j}^0 - \mathcal{E}_{i,j}^0} \right\|$

| $i, k \backslash j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | L_k^Σ | \mathcal{E}_k^Σ | L_k^{\max} |
|---------------------|--------------------------|------------------------|------------------------|-------------------------|---------------------------|---------------------------|-----------------|------------------------|--------------|
| 1 | | <u>1,4,6,2</u> 9-36 | <u>1,4,6,3</u> 8-16 | <u>1;4</u> 3-3 | <u>1;5(1,4,5)</u> 6-18 | <u>1,4,6</u> 5-25 | <u>31</u> 17 | <u>128</u> 48 | 9 |
| 2 | <u>2,3,1</u> 11-66 | | <u>2;3</u> 6-12 | <u>2,3,4</u> 9-9 | <u>2,3,4,5</u> 12-36 | <u>2,3,4,6</u> 11-55 | <u>49</u> 17 | <u>178</u> 104 | 12 |
| 3 | <u>3;1</u> 5-30 | <u>3,4,6,2</u> 9-36 | 0 | <u>3;4</u> 3-3 | <u>3,4,5</u> 6-18 | <u>3,4,6</u> 5-25 | <u>28</u> 14 | <u>112</u> 55 | 9 |
| 4 | <u>4,6,3,1</u> 10-60 | <u>4,6,2</u> 6-24 | <u>4,6,3</u> 5-10 | 0 | <u>4;5</u> 3-9 | <u>4;6</u> 2-10 | <u>26</u> 21 | <u>113</u> 69 | 10 |
| 5 | <u>5,2,3,1</u> 17-102 | <u>5;2</u> 6-24 | <u>5,2,3</u> 12-24 | <u>5,2,3,4</u> 15-15 | | <u>5,2,3,4,6</u> 17-85 | <u>67</u> 35 | <u>250</u> 102 | 17 |
| 6 | <u>6,3,1</u> 8-48 | <u>6;2</u> 4-16 | <u>6;3</u> 3-6 | <u>6,3,4</u> 6-6 | <u>6,3,4,5</u> 9-27 | 0 | <u>30</u> 15 | <u>103</u> 75 | 9 |

$$(a_j) = (6, \quad 4, \quad 2, \quad 1, \quad 3, \quad 5) \quad a^T = 1$$

Таблица 47. Совмещенная матрица (неориентированный граф) $\left\| \frac{\mu_{i,j}^0}{L_{i,j}^0} \right\|$

| j i, k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | L_k^Σ | L_k^{\max} |
|---------------|---------------------|---------------------|---------------------|-------------------|------------------------|-------------------|----------------|--------------|
| 1 | $\frac{0;0}{0}$ | $\frac{1,4,6,2}{9}$ | $\frac{1,4,6,3}{8}$ | $\frac{1;4}{3}$ | $\frac{1;5(1,4,5)}{6}$ | $\frac{1,4,6}{5}$ | $\frac{31}{9}$ | 9 |
| 2 | $\frac{2,6,4,1}{9}$ | $\mathbf{0}$ | $\frac{2;3}{6}$ | $\frac{2,6,4}{6}$ | $\frac{2,6,4,5}{9}$ | $\frac{2;6}{4}$ | $\frac{34}{0}$ | 9 |
| 3 | $\frac{3;1}{4}$ | $\frac{3;2}{6}$ | | $\frac{3;4}{3}$ | $\frac{3,4,5}{6}$ | $\frac{3;6}{6}$ | $\frac{26}{6}$ | 6 |
| 4 | $\frac{4;1}{3}$ | $\frac{4,6,2}{6}$ | $\frac{4;3}{3}$ | $\mathbf{0}$ | $\frac{4;5}{3}$ | $\frac{4;6}{2}$ | $\frac{17}{6}$ | 6 |
| 5 | $\frac{5;1}{6}$ | $\frac{5,4,6,2}{9}$ | $\frac{5,4,3}{6}$ | $\frac{5;4}{3}$ | | $\frac{5,4,6}{5}$ | $\frac{29}{9}$ | 9 |
| 6 | $\frac{6,4,1}{5}$ | $\frac{6;2}{4}$ | $\frac{6;3}{3}$ | $\frac{6;4}{2}$ | $\frac{6,4,5}{5}$ | | $\frac{19}{4}$ | $\mathbf{5}$ |

Если количество баз $R > 1$, то задача распадается на R подзадач, с одним складом каждая. При этом необходимо n пунктов так разделить на R групп, каждая из которых обеспечивается со своего r -го склада ($r = \overline{1, R}$ – точка x^r), чтобы суммарная длина маршрутов со всех R баз была минимальной. Формальная постановка задачи с R базами может быть представлена в виде

$$L^\Sigma(\bar{\delta}, R) = \sum_{r=1}^R \sum_{j \in \{j\}_{k^r}} L_{k^r, j}^0 \rightarrow \min_x, \quad (7.5)$$

$$\bar{\delta} \in A = \left\{ A^i \right\}_n, \quad \text{д.д. } i = k^r \in \{j\}_{k^r}, \quad r = \overline{1, R}, \quad (7.6)$$

где $\mathbf{x} = (x^r)_R$ – x^r – точка размещения r -й базы, обслуживающей множество пунктов r -й группы с номерами $\{j\}_{k^r}$; k^r – номер пункта A^{k^r} , в котором размещается r -я база; $L_{k^r, j}^0$ – длина кратчайшего пути от пункта A^{k^r} до пункта A_j .

Подмножества $\{j\}_{k^r}$, ($r = \overline{1, R}$) являются разбиением полного множества $I = \{\overline{1, n}\}$:

$$\bigcup_{r=1}^R \{j\}_{k^r} = I, \quad \{j\}_{k^r} \cap \{j\}_{k^i} = \emptyset, \quad i \neq r, \quad \sum_{r=1}^R n_r = n,$$

где n_r – число элементов множества $\{j\}_{k^r}$.

Для получения точного решения задачи с R базами необходимо рассмотреть все C_n^R возможных вариантов размещения баз (точек x^r , $r = \overline{1, R}$). При каждом из этих вариантов разбиение n пунктов по R группам осуществляется в следующем порядке. Последовательно, начиная с первого пункта ($j = 1$), для каждого столбца совмещенной матрицы кратчайших маршрутов пункт A_j включается в группу $\{j\}_{k^r}$, обслуживаемую r -й базой (пункт $i = k^r$), согласно условию

$$\min_{i \in \{k^r\}_R} \{L_{i,j}^0\} = L_{k^r,j}^0, \quad j = \overline{1, n} \Rightarrow k^r, \quad r, \quad \{j\}_{k^r}, \quad r = \overline{1, R}. \quad (7.7)$$

Условие (7.7) означает, что пункт с номером j (A_j) включается в обслуживание **ближайшей** r -й базой, расположенной в пункте A_{k^r} . После получения оптимального **разбиения** (7.7) из матрицы кратчайших маршрутов берутся их длины и вычисляется сумма (7.5). Из всех C_n^R вариантов, полученных таким путем, выбирается лучший, что и определяет оптимальное размещение R баз.

При больших значениях n и R перебор C_n^R вариантов окажется весьма громоздким (задача NP-полная), поэтому для решения задачи размещения баз применим следующий неформальный подход: первая ($r = 1$) база (точка x^1) помещается в пункте $i = k^1$ с *минимальной суммарной длиной маршрутов* (7.4). Из строки $i = k^1$ выбирается несколько наименьших элементов $L_{k^1,j}^0$, и по соответствующим им индексам j предварительно формируется первая группа пунктов $\{j\}_{k^1}^1$. Далее вычисляются суммы длин L_k^Σ оставшихся маршрутов. По уточненным суммарным длинам L_k^Σ определяется точка размещения x^2 второго склада ($r = 2$). Группа $\{j\}_{k^2}^2$ формируется уже с учетом двух баз, согласно условию (7.7). Далее цикл повторяется, пока не будут размещены все R базы и сформированы R группы.

После этого проверяется возможность улучшить решение путем

возможного смещения точек x^r . Проиллюстрируем методику решения задачи на примере размещения двух баз на ориентированном графе (табл. 46).

Базу $r = 1$ следует разместить (табл. 46) в пункте A_4 ($k^1 = 4$), т.к. при этом сумма длин минимальна ($L_4^\Sigma = 26$). В группу $k^1 = 4$ включаются пункты с номерами $\{j\}'_4 = \{4,5,6\}_4$. Длины кратчайших маршрутов к ним соответственно равны $\{L_{4,j}^0\} = \{0,3,2\}$. Сумма длин использованных маршрутов равна $0 + 3 + 2 = 5$. Исправленные значения сумм записаны в нижних частях тех же клеток в правой части табл. 46. Минимальному их значению соответствует строка $i = k^2 = 3$, поэтому вторая база ($r = 2$) размещается в пункте A_3 . Согласно условию (7.7) все n пунктов последовательно, начиная с A_1 ($j = 1$), разбиваются на $R = 2$ подмножества: $\{j\}_{k^1}$, $\{j\}_{k^2}$ ($k^1 = 4$, $k^2 = 3$). Сохраняя запись индексов, в соответствии с (7.7) и табл. 46 имеем

$$\left\{L_{k^r,j}^0(R)\right\}_n = \{5_{3,1}, 6_{4,2}, 0_{3,3}, 0_{4,4}, 3_{4,5}, 2_{4,6}\}. \quad (7.8)$$

Из (7.8) для полученного размещения баз $(k^r) = (k^1, k^2) = (4;3)$ следует

$$\{j\}_{k^1=4} = \underbrace{\{2,4,5,6\}}_{r=1}, \quad \{j\}_{k^2=3} = \underbrace{\{1,3\}}_{r=2}. \quad (7.9)$$

Первые индексы в (7.8) указывают номера $i = k^r$ пунктов размещения баз и позволяют выделить множества номеров пунктов, обслуживаемых с соответствующих баз (вторые индексы в (7.8)). На основании (7.8) и (7.9) для (7.5) имеем

$$L^\Sigma(x^0, 2) = \underbrace{(6 + 0 + 3 + 2)}_{r=1 (k^1=4)} + \underbrace{(5 + 0)}_{r=2 (k^2=3)} = 11 + 5 = 16,$$

где суммируемые элементы в табл. 46 выделены шрифтом.

Множество $\{j\}'_4 = \{4,5,6\}$, сформированное до введения второй базы, согласно (7.7) уточнено [см. (7.9)].

Перебор всех $C_6^2 = 15$ возможных вариантов подтвердил оптимальность размещения баз в пунктах A_4 и A_3 (их номера в (7.9) выделены шрифтом).

Примечание. Решая R частных задач, соответствующих разбиению (7.9), можно убедиться, что перемещение базы из пункта A_4 в любой из пунктов A_5, A_6 (табл. 46, $i = 4$) только ухудшит решение. Например, переместив базу $r = 1$ из A_4 в A_6 , получим (табл. 46)

$$L_6^\Sigma = L_{6;2}^0 + L_{6;4}^0 + L_{6;5}^0 = 4 + 6 + 9 = 19 > 16 = L_4^\Sigma.$$

Рассмотренным методом получим решение для случая *неориентированного графа* ($R = 2$). Базу $r = 1$ следует поместить в пункт A_4 (табл. 47, $i = k^1 = 4$). В начальное множество $\{j\}_4$ включены почти все элементы j (кроме $j = 2$). Действительно, в каждом из столбцов $j \in \{j\}_4$ длина маршрута $L_{4,j}^0$ наименьшая (исключая ноль). После уточнения сумм длин *оставшихся* маршрутов ($L_k^{\Sigma'}$ записаны в нижних частях клеток столбца L_k^Σ (табл. 47)) определяется минимальная длина $L_2^{\Sigma'} = 0$. Ей соответствует строка $i = k^2 = 2$ и $\{j\}_2 = \{2\}$.

Согласно полученному решению базы размещаются в пунктах A_4 и A_2 ($\{k^r\} = \{4;2\}$), при этом множества номеров групп $\{j\}_{k^r}$ обслуживаемых объектов и суммы длин маршрутов, согласно (7.7) и (7.5), равны:

$$\left\{ L_{k^r, j}^0 \right\}_n = \{3_{4;1}, 0_{2;2}, 3_{4;3}, 0_{4;4}, 3_{4;5}, 2_{4;6}\}, \quad \{k^r\}_R = \{4;2\},$$

$$\{j\}_4 = \{1, 3, 4, 5, 6\}, \quad \{j\}_2 = \{2\}, \quad (7.10)$$

$$L(x, 2) = \underbrace{(3 + 3 + 0 + 3 + 2)}_{r=1} + \underbrace{0}_{r=2} = 11.$$

Поскольку для формирования множества баз $\{k^r\}_R$ использовался неформальный сокращенный метод, то полученное решение следует попытаться улучшить методом *перемещений*. Такую попытку в данном случае требуется сделать для группы маршрутов, исходящих от базы $r = 1$, расположенной в пункте A_4 .

Из строки $i = k^1 = 4$ (табл. 47) по начальным дугам маршрутов видно, что переход точки x^1 возможен к пунктам $\{1, 3, 5, 6\}$. Каждый из этих переходов дает увеличение суммы длин маршрутов:

$$A_4 \xrightarrow{x^1} A_1 : L^\Sigma(\mathbf{x}) = 0 + 0 + 6 + 3 + 6 + 4 = 19 > 11,$$

$$A_4 \xrightarrow{x^1} A_3 : L^\Sigma(\mathbf{x}) = 5 + 0 + 0 + 3 + 6 + 4 = 18 > 11,$$

$$A_4 \xrightarrow{x^1} A_5 : L^\Sigma(\mathbf{x}) = 3 + 6 + 3 + 0 + 0 + 2 = 14 > 11,$$

$$A_4 \xrightarrow{x^1} A_6 : L^\Sigma(\mathbf{x}) = 3 + 4 + 3 + 0 + 3 + 0 = 13 > 11.$$

Перебор всех $C_6^2 = 15$ вариантов размещения баз подтверждает оптимальность решения (7.10). При оптимизации размещения очередной $R+1$ -й базы исходной информацией является вариант с размещением R баз (7.8), и к нему последовательно добавляется каждый из $n-R$ возможных вариантов размещения $R+1$ -й базы. Из этих вариантов выбирается лучший (с минимальной суммой длин L_k^Σ).

Для дальнейшего уменьшения объема вычислений вместо оценки и сравнения $n-R$ вариантов в вычислительной схеме (табл. 48) использован метод перемещений при начальном размещении $r=3$ базы в одном из пунктов A_i , $\{i\} = \{1,2,5,6\}$ (табл. 46, ориентированный граф).

Таблица 48

| t | № | j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | R | $L^\Sigma(x, R)$ |
|---|---|---------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----|------------------|
| 1 | 1 | $L_{k^r, j}^0(R)$ | 5 ₃ | 6 ₄ | 0 ₃ | 0 ₄ | 3 ₄ | 2 ₄ | 2 | 16 |
| | 2 | $L_{6, j}^0$ | 8 | 4 | 3 | 6 | 9 | 0 | - | - |
| | 3 | $L_{k^r, j}^0(R+1)$ | 5 ₃ | 4 ₆ | 0 ₃ | 0 ₄ | 3 ₄ | 0 ₆ | 3 | 12 |
| 2 | 4 | $L_{2, j}^0$ | 11 | 0 | 6 | 9 | 12 | 11 | - | - |
| | 5 | $L_{k^r, j}^0(R+1)$ | 5 ₃ | 0 ₂ | 0 ₃ | 0 ₄ | 3 ₄ | 2 ₄ | 3 | 10 |

Примечание. В строках 1, 3, 5 сохранены только первые индексы (номера пунктов – баз). Вторые индексы вынесены в верхнюю часть таблицы.

В первой строке табл. 48 записана исходная информация (7.8). Длины маршрутов $L_{6, j}^0$ от третьей базы ($k^3 = 6$) взяты из табл. 46, $i = 6$ (строка 2 табл. 48). «Свертка» этих строк в соответствии с (7.7) дает улучшенный результат, записанный в строке № 3 табл. 48.

Из пункта A_6 смещение базы $r = 3$ возможно только в пункт A_2 , что видно из начальных дуг маршрутов (табл. 46, строка $i = 6$). Переместив базу $r = 3$ из пункта A_6 в пункт A_2 , получим улучшенное решение, записанное в строке № 5 табл. 48 («свертка» строк № 1 и 4). Элементы, изменившие свои значения в ходе «свертки» (7.7), в табл. 48 выделены шрифтом.

Дальнейшее улучшение решения смещением точки x^3 из пункта A_2 получить невозможно. Это следует из анализа начальных дуг маршрутов (табл. 46, строка $i = 2$).

Описанную процедуру можно выполнить без записи табл. 48, т.к. элементы строки 1 табл. 48 выделены в табл. 46 шрифтом.

Из табл. 47 для неориентированного графа видно, что при полученном решении (7.10) для $R = 2$ все значащие выделенные элементы являются *минимальными в своих столбцах* (не считая $L_{i,i}^0 = 0, i = \overline{1, n}$). Следовательно, уменьшение суммы (7.5) можно достигнуть только заменой наибольшего из выделенных элементов ($L_{4,1}^0 = L_{4,3}^0 = L_{4,5}^0 = 3$) на ноль, путем размещения в соответствующем пункте $A_i, i \in \{1, 3, 5\}$ точки x^3 . Таким образом будет получено три варианта решения (размещения базы $r = 3$):

$$\{k^r\}: \{4,2,1\}, \{4,2,3\}, \{4,2,5\}.$$

Суммарная длина маршрутов при $R = 3$ уменьшится на 3 ед. по сравнению с решением (7.10) для $R = 2$ и станет равной 8 ед. Только первая база ($r = 1, A_4$) будет обслуживать несколько пунктов, другие две – по одному (по месту расположения базы).

При $R = n$ каждая база обслуживает свой пункт и суммарная длина маршрутов равна нулю.

7.2. Учет грузопотоков и грузоподъемности транспортных средств при размещении баз

В реальных условиях при размещении баз необходимо учитывать потребности по доставке грузов в различные пункты, а также грузоподъемность транспортных средств, используемых r -й базой, расположенной в пункте A_{k^r} . Тогда задача будет состоять в таком размещении R баз в R пунктах (вектор $(k^r)_R$), при котором суммарные энергозатраты будут минимальны.

Дополнительной к совмещенной матрице кратчайших маршрутов

информацией будут являться вектор грузов $\mathbf{a} = (a_j)_n$, которые должны быть доставлены в каждый пункт в течение некоторого периода времени, и грузоподъемность транспортных средств, используемых r -й базой (пункт $i = k^r$). Грузопоток от пункта A^i к A_j будет включать в себя **полезные** энергозатраты $\mathcal{E}_{i,j}^P$ и **пассивные** $\mathcal{E}_{i,j}^T$, связанные с пробегом самого транспортного средства (к пункту $A_j - L_{i,j}^0$ и обратно – $L_{j,i}^0$), при этом его вес $a_{i,j}^T$ зависит от типа средства (от номера базы $r : i = k^r$) и пункта доставки груза (т.е. от j). Тогда полезные и пассивные энергозатраты от пункта A^i к A_j запишутся в виде

$$\mathcal{E}_{i,j}^P = a_j L_{i,j}^0, \quad \mathcal{E}_{i,j}^T = a_{i,j}^T (L_{i,j}^0 + L_{j,i}^0), \quad i \in \{k^r\}_R, \quad j \in \{j\}_{k^r}, \quad r = \overline{1, R},$$

где $\mathcal{E}_{i,j}^T$ – пассивные затраты, даны для одного рейса.

Так как груз a_j может во много раз превышать грузоподъемность средства $g_{i,j}$, то потребуются сделать $a_j/g_{i,j}$ рейсов для перевозки всего груза, и, следовательно, полные пассивные энергозатраты для перевозки грузов по маршруту $\mu_{i,j}^0$ вычисляются по формуле

$$\mathcal{E}_{i,j}^T = \mathcal{E}_{i,j}^{T_1} \frac{a_j}{g_{i,j}} = a_{i,j}^T (L_{i,j}^0 + L_{j,i}^0) \frac{a_j}{g_{i,j}},$$

где $\mathcal{E}_{i,j}^{T_1}$ – пассивные энергозатраты на одну поездку туда и обратно.

Полагая, что для межгородской транспортной сети более типичен случай $L_{i,j}^0 = L_{j,i}^0$, а средства однотипны ($g_{i,j} = g$, $a_{i,j}^T = a^T$, $\forall i, j$), то для каждого маршрута получим следующие грузопотоки:

$$\mathcal{E}'_{i,j} = \mathcal{E}_{i,j}^P + \mathcal{E}_{i,j}^T = a_j L_{i,j}^0 \left(1 + \frac{2a^T}{g} \right) = \mathcal{E}_{i,j}^P \cdot k^T, \quad (7.11)$$

где k^T – коэффициент транспортных (пассивных) энергозатрат.

Поскольку в (7.11) множитель в скобках (коэффициент k^T) не зависит от i, j , то он может быть опущен, что не повлияет на размещение баз. Вычислив совмещенную матрицу

$$\left\| \frac{\mu_{i,j}^0}{\mathcal{E}_{i,j}^{\Pi}} \right\| = \left\| \frac{\mu_{i,j}^0}{a_j L_{i,j}^0} \right\|, \quad (7.12)$$

можно все, изложенное в подразделе 7.1, применить и для оптимального размещения баз с учетом грузопотоков и транспортных средств.

Формальная постановка обобщенной задачи размещения баз в новых условиях мало отличается от задачи (7.5), (7.6):

$$\mathcal{E}^{\Sigma}(x, R) = \sum_{r=1}^R \sum_{j \in \{j\}_{k^r}} a_j \cdot L_{k^r, j}^0 \rightarrow \min_x,$$

$$x \in \{A_i\}_n, \text{ т.е. } k^r \in \{j\}_{k^r}, r = \overline{1, R},$$

где a_j – груз, подлежащий доставке в пункт A_j ($j = \overline{1, n}$).

Для иллюстрации метода при $R = 2$ используем совмещенную матрицу (табл. 46), в правом нижнем углу каждой клетки которой записаны полезные энергозатраты $\mathcal{E}_{i,j}^{\Pi}$ (7.12), соответствующие кратчайшим маршрутам $\mu_{i,j}^0$. Вектор грузов \mathbf{a} записан между табл. 46 и табл. 47. Суммарные затраты, вычисленные по формуле

$$\mathcal{E}_k^{\Sigma} = \sum_{j=1}^n \mathcal{E}_{k,j}^0, \quad i = k = \overline{1, n},$$

записаны в верхних частях клеток в столбце \mathcal{E}_k^{Σ} табл. 46. Минимальные энергозатраты $\mathcal{E}_6^{\Sigma} = 103$ ед. соответствуют пункту A_6 ($i = k^1 = 6$), где и размещается первая ($r = 1$) база. В множество обслуживаемых этой базой пунктов включаются наименьшие из элементов $\mathcal{E}_{6,j}^0$, и в первую очередь те из них, которые минимальны в своих столбцах. Таким путем предварительно получена группа номеров объектов для обслуживания базой $r = 1$, расположенной в пункте A_6 ($k^1 = 6$):

$$\{j\}_{k^1} = \{2, 3, 4, 6\}.$$

Соответствующие суммарные энергозатраты равны:

$$\mathcal{E}_6^{\Sigma'} = \sum_{i \in \{j\}_k^1} \mathcal{E}_{6,j}^0 = 16 + 6 + 6 + 0 = 28 \quad (\text{табл. 5'}, i = k^1 = 6).$$

Энергозатраты, необходимые для обслуживания базой $k^1 = 6$ оставшихся пунктов $I \setminus \{j\}_6 = \{1;5\}$, равны:

$$\mathcal{E}_6^{\Sigma} - \mathcal{E}_6^{\Sigma'} = 103 - 28 = 75 \quad (\text{табл. 46}, i = 6).$$

Аналогичным образом уточняются требуемые энергозатраты и для других строк ($k \neq 6$):

$$\mathcal{E}_k^{\Sigma Y} = \mathcal{E}_k^{\Sigma} - \mathcal{E}_k^{\Sigma'} = \mathcal{E}_k^{\Sigma} - \sum_{j \in \{j\}_k^r} \mathcal{E}_{k^r,j}^0 = \sum_{j \in I \setminus \{j\}_k^r} \mathcal{E}_{k^r,j}^0,$$

где вторая сумма обозначает, что уточненное значение энергозатрат $\mathcal{E}_k^{\Sigma Y}$ может быть вычислено и непосредственно как сумма энергозатрат на обслуживание пунктов, не вошедших в множество $\{j\}_k^1$:

$$\mathcal{E}_6^{\Sigma Y} = \sum_{j \in \{1;5\}} \mathcal{E}_6^0 = 48 + 27 = 75.$$

Из столбца \mathcal{E}_k^{Σ} табл. 46 следует, что минимальные затраты соответствуют размещению базы $r = 2$ в пункте A_1 . По аналогии с (7.8) для $R = 2$ получаем

$$\left\{ \mathcal{E}_{k^r,j}^0(R) \right\}_n = \{0_{1;1}, 16_{6;2}, 6_{6;3}, 3_{1;4}, 18_{1;5}, 0_{6;6}\},$$

откуда следуют разбиение пунктов по группам обслуживания и соответствующие им энергозатраты:

$$\{j\}_6^{r=1} = \{2,3,6\}, \{j\}_1^{r=2} = \{1,4,5\}, \{k^r\}_R = \{6,1\}, \mathcal{E}^{\Sigma}(x, R) = 22 + 21 = 43. \quad (7.13)$$

Анализируя возможные смещения базы $r = 1$ из A_6 в A_3 или в A_2 (табл. 46, строка $i = 6$) и базы $r = 2$ из A_1 в A_4 (табл. 46, строка $i = 1$) методом смещений, можно убедиться, что улучшить решение невозможно.

Например, сместив базу $r = 2$ из A_1 в A_4 , для нового варианта размещения баз $\{k^r\} = \{k^1; k^2\} = \{6; 4\}$ получим (используются сроки $i \in \{6; 4\}$ табл. 46):

$$\left\{ \mathcal{E}_{k^r, j}^0 \right\}'(R) = \{48_{6;1}, 16_{6;2}, 6_{6;3}, 0_{4;4}, 9_{4;5}, 0_{6;6}\},$$

$$\{j\}_6^{r=1} = \{1, 2, 3, 6\}, \{j\}_4^{r=2} = \{4, 5\},$$

$$\mathcal{E}^\Sigma(x', R) = 70 + 9 = 79 > 43.$$

Примечание. Оптимальное размещение (7.13) баз совпало с пунктами, в которые требуется доставить наиболее *тяжелые* грузы ($a_1 = 6, a_6 = 5$), что логически вполне оправдано.

Для более точного учета энергозатрат при перевозках необходимо принимать во внимание коэффициент, опущенный в (7.11), но позволяющий получить некоторую дополнительную информацию, связанную с перевозками грузов. Например, если в качестве единицы измерения веса взять вес транспортного средства (т.е. $a^T = 1$), то при $g = 5$ (возможная загрузка транспортного средства в 5 раз больше веса транспортного средства) коэффициент k^T в (7.11) будет равен $k^T = 1 + 0,4 = 1,4$, т.е. пассивные энергозатраты составят 40 % от полезных энергозатрат $\mathcal{E}_{i,j}^{\Pi}$ (7.11). Если при прочих равных условиях вдвое увеличить полезные энергозатраты (возвращение транспорта с полной загрузкой), то пассивные затраты снизятся до 20 %. Дальнейшее их снижение возможно только путем увеличения загрузки $g_{i,j}$.

7.3. Поиск минимаксных точек на графе

При решении практических вопросов может возникнуть задача, связанная с таким размещением некоторого объекта на местности, при котором расстояние от него до самого *удаленного* пункта было бы по возможности *наименьшим*. В качестве подобного объекта можно, например, рассматривать пункт скорой помощи или пожарное депо. Необходимо разместить его в такой точке x , чтобы наиболее удаленный от точки пункт района был, насколько это возможно, ближе к точке x . Формальная постановка задачи может быть записана в виде *минимаксной* задачи:

$$L^m(x, R) = \max_{1 \leq j \leq n} \{L_{x,j}^0\} \rightarrow \min_x, \quad (7.14)$$

$$x \in G(A, M), \quad R = 1,$$

где $L_{x,j}^0$ – кратчайший путь от точки x до пункта A_j ($j = \overline{1, n}$); $G(A, M)$ – граф дорожной сети.

В отличие от предыдущих двух задач оптимальная точка x может находиться и на дуге (ребре) графа. Например, на графе с двумя вершинами точка x будет находиться в середине ребра, соединяющего вершины. На неориентированном графе в виде разностороннего треугольника точка x будет находиться около вершины, к которой прилегают *две меньшие стороны* треугольника, в точке, делящей сумму *меньших* сторон пополам.

В общем случае ($n > 3$) определение оптимального положения точки x рассматриваемым методом смещений также начинается с вычислений совмещенной матрицы кратчайших маршрутов (табл. 48). В каждой строке $i = k$ определяется наиболее *длинный маршрут* (табл. 48, столбец L_k^{\max}):

$$L_k^{\max} = \max_{1 \leq j \leq n} \{L_{k,j}^0\} = L_{k,j^m}^0, \quad k = \overline{1, n}, \Rightarrow \mu_{k,j^m}^0, \quad j^m, \quad (7.15)$$

где j^m – номер конечного пункта A_{j^m} наиболее длинного маршрута.

Номер пункта $i = k^1$ начального размещения точки x определяется из условия

$$\min_k \{L_{k,j^m}^0\} = \min_{1 \leq k \leq n} \max_{1 \leq j \leq n} \{L_{k,j}^0\} = L_{k^1,j^m}^0 \Rightarrow i = k^1. \quad (7.16)$$

Таким пунктом для рассматриваемого примера (табл. 47) является пункт A^6 ($k^1 = 6$). Дальнейшая оптимизация возможна путем смещения

точки x от пункта $A^{k^1} = A^6$ по начальной дуге (6;4) маршрута $\mu_{k^1,j^m}^0 = \mu_{6,1}^0$. Условие (7.15) разбивает множество I номеров пунктов на

две группы: $\{j\}^m = \{1,4,5\}^m$ – номера конечных пунктов тех маршрутов, длина которых *убывает* (индекс m) при смещении точки x по начальной дуге (ребру) маршрута (7.15); $\{j\}^B = \{2,3,6\}$ – множество номеров пунктов,

длина маршрутов к которым *возрастает* при этом. Номер j^B конечного пункта A_{j^B} *наибольшего* по длине маршрута находится из условия

$$\max_{j \in \{j\}^B} \{L_{k,j}^0\} = L_{k,j^B}^0 \Rightarrow \mu_{k,j^B}^0, j^B. \quad (7.17)$$

Для рассматриваемого примера согласно (7.15), (7.17) имеем

$$L_{k,j^m}^0 = L_{6;1}^0 = 5, L_{k,j^B}^0 = L_{6;2}^0 = 4, j = 1, j^B = 2 \quad (k = k^1 = 6).$$

При смещении точки x от пункта A^6 по дуге (6;4) величина смещения Δx определяется из условия, что длина убывающего маршрута сравнивается с длиной возрастающего маршрута:

$$L_{x,j^m}^0 = L_{x,j^B}^0, \text{ т.е. } L_{k,j^m} - \Delta x = L_{k,j^B} + \Delta x, \quad (k = k^1). \quad (7.18)$$

Из (7.18) для рассматриваемого примера имеем

$$\Delta x = 0,5 \left(L_{k^1,j^m}^0 - L_{k^1,j^B}^0 \right) = 0,5(5 - 4) = 0,5. \quad (7.19)$$

Оптимальное положение точки x находится на расстоянии 0,5 ед. от пункта A_6 по дуге (6;4), (рис.1). При этом длина каждого из множества $\{j\}^m$ убывающих маршрутов уменьшится на 0,5 ед., а возрастающих – увеличится на 0,5 ед. Длины кратчайших маршрутов из оптимальной точки x^0 станут равными (сравни с $L_{6,j}^0$; табл. 47):

Таблица 49

| | | | | | | |
|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $L_{x^0,j}^0$ | 4,5 | 4,5 | 3,5 | 1,5 | 4,5 | 0,5 |

Длина маршрута до наиболее удаленного пункта при этом минимальна и равна $L(x^0) = 4,5$ ед.

Примечание. Был использован сокращенный метод смещения, при котором начальное положение точки x выбрано из условия (7.16), что сокращает число смещений точки x при оптимизации. Например, при начале в пункте A^1 будем иметь (табл. 47, $i = 1$):

$$\{j\}^m = \{2,3,4,5,6\}, \{j\}^B = \{1\}. L_{1,j^m}^0 = 9, L_{1,j^B}^0 = 0.$$

Согласно (7.19) $\Delta x = 0,5(9 - 0) = 4,5$ ед., однако Δx не может быть больше длины начальной дуги (1;4), $c_{1,4} = 3$, поэтому при $\Delta x = \min\{4,5;3\} = 3$ первое смещение точки x приводит к пункту A_4 . Далее имеем

$$\{j\}^m = \{2;6\}, \{j\}^B = \{1,3,4,5\}. L_{4,j^m}^0 = 6, L_{4,j^B}^0 = 3, \Delta x = 1,5 < C_{4,6} = 2$$

Смещая точку x по дуге (4;6) на $\Delta x = 1,5$ ед., приходим к тому же решению x^0 (табл. 49).

Начальным не может быть тот пункт, для которого смещение $\Delta x = 0$ (A_3).

В зависимости от исходных данных и в первую очередь размеров района размещения n пунктов, даже при оптимальном решении x^0 , расстояние $L^m(x^0, R)$ при $R = 1$ может оказаться больше максимально допустимого значения L^{don} , обусловленного некоторыми практическими требованиями. Возникает задача такого *покрытия района* сетью обслуживающих точек $x = (x^r)_R$, при котором выполняется условие

$$L^m(x, R) \leq L^{\text{don}}, \quad r = \overline{1, R}, \quad (7.20)$$

а количество R обслуживающих точек **минимально** (обратная задача покрытия).

Примечание. Прямая задача покрытия состоит в таком размещении заданного количества R точек $x^0 = (x^{0,r})_R$, которое для каждого ($r = \overline{1, R}$) обслуживаемого участка района с пунктами $A_j, j \in \{j\}_k^r$ обеспечивает наименьшее расстояние (время достижения) до наиболее удаленного пункта $L^m(x^0, 1)$ (7.14).

Решение обратной задачи можно получить, решив несколько раз (при различных значениях R) прямую задачу. Далее рассмотрим возможный подход к решению прямой задачи при $R > 1$. На примере табл. 47 найдем решение для случая $R = 2$.

Основная идея решения состоит в том, чтобы путем попарного ($R = 2$) сравнения строк (их элементов $L_{i,j}^0$) найти такую пару, при которой согласно (7.7) будет возможно максимально *уменьшить наибольшие* элементы $L_{i,j}^0$. Далее такое сравнение производится до *смещения точек x^r от их пунктов размещения* (проверка на такое смещение является заключительным этапом решения).

Из строки $i = 6$ табл. 47 видно, что наибольшие элементы $L_{6,1}^0$ и $L_{6,5}^0$ можно уменьшить, если базу $r = 2$ (точка x^2) поместить в пункте A_4 . При полученном текущем решении $(x^r)_2 = (A_6, A_4)$ согласно (7.7) имеем

$$\left\{ L_{k^r, j}^0(R) \right\}_n = \left\{ 3_{4;1}, 4_{6;2}, 3_{4;3}, 0_{4;4}, 3_{4;5}, 0_{6;6} \right\} \max_j \left\{ L_{k^r, j}^0(R) \right\} = 4_{6;2} \\ \exists_{i,j}^T$$

Элемент $L_{6;2} = 4$ из всех значащих элементов столбца $j = 2$ является наименьшим, поэтому уменьшить его значение можно только путем перемещения точки x^1 из пункта A_6 в пункт A_2 . При решении $(x^r)_2 = (A_2, A_4)$ имеем

$$L^m(x, 2) = \max \left\{ 3_{4;1}, 0_{2;2}, 3_{4;3}, 0_{4;4}, 3_{4;5}, 2_{4;6} \right\} = 3, \quad x^0 : (A_2, A_4). \quad (7.21)$$

Уменьшить значение $L^m(x, 2) = 3$ возможно только путем введения еще трех дополнительных точек x^r в пунктах A_1, A_3, A_5 , при этом получим $L^m(x, 5) = 2$.

Улучшить решение путем смещения любой из точек $x^1(A_2)$, $x^2(A_4)$ также невозможно. Сдвиг x^2 , например, по дуге (4;5) на $\Delta x > 0$ приведет к увеличению на Δx расстояний до пунктов A_1 и A_3 (табл. 47, $i = 4$). Решение (7.21) оптимально.

Получим решение обратной задачи. Например, при $3 \leq L^{don} < 4,5$ условие (7.20) будет выполнено при двух ($R = 2$) пунктах обслуживания, размещенных в точках A_4 и A_2 (7.21).

Ориентированный граф $G(A, M)$ отражает более жесткие требования к сети (городская дорожная сеть), и при прочих равных условиях решение не может улучшиться. Например, из табл. 46 точка x ($R = 1$) может быть расположена в одном из трех пунктов A_1, A_3, A_6 , при этом расстояние до любого из других пунктов не превысит 9 ед. Из этих пунктов предпочтение может быть отдано одному, исходя из каких-либо иных соображений. Например, полагая, что все n маршрутов будут использоваться с одинаковой частотой $1/n$, можно найти среднюю длину маршрута по формуле

$$L_k^{cp} = L_k^{\Sigma} / n, \quad k \in \{1, 3, 6\}.$$

В этом случае предпочтение должно быть отдано варианту размещения точки x в пункте A_6 , т.к. при этом *средняя длина маршрута* будет минимальна.

При размещении точки x в любом из пунктов ее смещение может быть целесообразно, как правило, только *по ребру*, что дает право транспортным средствам двигаться в обоих направлениях. Проверим, что поместив точку x в пункте A_3 , невозможно далее уменьшить самый длинный маршрут $L_{3,2}^0 = 9$ и улучшить решение. Действительно, сдвинув точку x от пункта A_3 по дуге (3;4) на величину $\Delta x > 0$, получим уменьшение длин маршрутов к пунктам A_2, A_4, A_5, A_6 (табл. 46, строка $i = 3$) на величину Δx , однако длины маршрутов к пунктам A_1 и A_3 намного увеличатся:

$$L_{3,1}^{0'} = (c_{3,4} - \Delta x) + L_{4,1}^0 = (3 - \Delta x) + 10 = 13 - \Delta x > 10, \quad (\Delta x < 3).$$

Ухудшение решения обусловлено тем, что при смещении точки x от пункта A_3 к пункту A_4 добираться к пункту A_1 придется окольным путем через пункт A_4 .

Примечание. Если на участке от A_3 до A_4 разрешить двухстороннее движение (дугу (3;4) заменить ребром $c_{3,4} = c_{4,3} = 3$), то согласно (7.19) получим $\Delta x = 2$ и решение улучшится:

$$L(x, 1) = \max_{1 \leq j \leq n} \{7, 7, 2, 1, 4, 3\} = 7.$$

Наибольшее улучшение решения аналогичным путем будет

получено при начальном размещении точки x в пункте A_1 при замене дуги (1;4) ребром ($c_{1,4} = c_{4,1} = 3$). Точка x сместится в пункт A_4 , при этом $L(x,1) = 6$.

Вводить очередную точку следует, *максимально* улучшив вариант размещения предыдущих точек. Для этого в строке $i=3$ (пусть в A_3 находится точка x^1) следует найти по крайней мере два наибольших элемента $L_{3,j}^0$ ($L_{3,2}^0 = 9$, $L_{3,5}^0 = 6$) и путем выбора пункта размещения точки x^2 попытаться уменьшить значение найденных элементов, начиная с наибольшего. Помещая точку x^2 в любом из пунктов с номерами $\{j\}^{x^2} = \{2,4,5,6\}$ (табл. 46, $L_{i,2} \leq L_{3,5} = 6$), согласно (7.7) получим улучшенное решение $L^m(x,1) = 6$. Из множества $\{i\}^{x^2}$ теперь следует попытаться выбрать пункт размещения точки x^2 , при котором новое значение целевой функции (7.14) станет меньше шести. Номер $i \in \{j\}^{x^2}$ оптимального пункта размещения точки x^2 следует искать в столбце $j=5$, в котором находится второй из наибольших элементов ($L_{i,5}^0 = 6$). Строки с номерами $i \in \{2;6\}$ сразу отпадают, т.к. они только ухудшат решение ($L_{2,5}^0 = 12$, $L_{6,5}^0 = 9 > 6$). Выбор любой из оставшихся строк $\{4;5\}$ также не позволяет улучшить решение:

$$i = 4: L^m(x,2) = \max_j \{5_{3,1}, 6_{4,2}, 0_{3,3}, 0_{4,4}, 3_{4,5}, 2_{4,5}\} = 6, L^{cp'} \approx 2,7, \quad (7.22)$$

$$i = 5: L^m(x',2) = \max_j \{5_{3.1}, 6_{5.2}, 0_{3.3}, 3_{3.4}, 0_{5.5}, 5_{3.6}\} = 6, L^{cp'} \approx 3,2.$$

Смещением точек x^1, x^2 от вершин решения не улучшаются, поэтому окончательный выбор можно сделать из условия *минимума средней длины маршрута*, поместив точку x^2 в пункте A_4 . Обслуживаемые пункты распределятся на обслуживание следующим образом [см. (7.22)]:

из точки x^1 (A_3) пункты $\{A_1, A_3\}$,

из точки x^2 (A_4) пункты $\{A_2, A_4, A_5, A_6\}$.

Маршрут к каждому из них и его длина записаны в табл. 46.

Выводы

1. Определение экстремальных точек на графе (минисуммных и минимаксных) согласно рассмотренной методике выполняется в два этапа:
 - построение полного множества кратчайших маршрутов (предварительный этап);
 - размещение R точек x^r ($r = \overline{1, R}$) на графе, удовлетворяющих заданным требованиям, методом перемещений.
2. Решения минисуммной и минимаксной задач совпадают по мере увеличения числа точек R , покрывающих граф. При $R = n$ покрывающие точки находятся в вершинах графа, а значения целевых функций равны нулю.
3. Решение минисуммной задачи соответствует вершинам графа.
4. Решение минимаксной задачи, как правило, лежит на ребрах графа (граф неориентированный, смешанный) или в вершинах (граф ориентированный).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Любая сложная практическая задача, математическую модель которой не удастся представить в форме, доступной для решения и анализа известными методами, требует поиска и разработки новых подходов и методов решения. Поиск таких подходов и методов, как правило, начинается с **неформального анализа задачи**, сопутствующих ей условий, частных случаев, отражающих отдельные её стороны, изучение которых раскрывает проблему в целом и позволяет наметить наиболее перспективные пути дальнейших исследований.

Задача коммивояжера, весьма простая в своей концептуальной постановке, является довольно сложной для формализации и ещё более сложной для решения, особенно в том случае, когда речь идёт о задаче большого размера ($n > 500$). На первый план при этом выступают **неформальные (эвристические) методы**, основанные, как правило, на использовании некоторых специфических особенностей задачи или её физических аналогов.

Особенностью комбинаторных задач, к которым относится и задача коммивояжера, является невозможность применения хорошо разработанного **классического аппарата бесконечно малых**. Это в основном и обуславливает сложность их решения. Поиск специальных приёмов и методов для их преодоления, применительно к задаче

коммивояжера, по существу и является одной из основных целей работы.

Другой целью, которую автор ставил перед собой при разработке материала, была попытка показать логические пути, приводящие к тем или иным решениям при разработке или модификации предлагаемых методов. Именно поэтому предложенные числовые примеры, иллюстрирующие методы, решались «вручную» с сохранением всей **промежуточной информации** как основы для неформального анализа методов и дальнейшего их совершенствования. Подобный неформальный анализ будет всегда недоступен для любых самых совершенных интеллектуальных программ, т.к. в любой из них, может быть, в самых глубинных её корнях, будет невозможно обойтись без детерминированных алгоритмов, предусмотренных её разработчиком.

В основе рассмотренных методов лежит неформальный (эвристический) подход, при этом центральным из них является **эстафетный метод**, позволяющий с относительно небольшими затратами машинных ресурсов получить **точное решение задачи о кратчайшем пути**.

Задачу коммивояжера можно рассматривать как частный случай задачи о кратчайшем пути с **дополнительным условием об обязательном посещении всех n пунктов**. Однако это условие существенным образом влияет на решение, для получения которого эстафетный метод в чистом виде становится неприемлемым. На его основе в лучшем случае могут быть получены оптимальные замкнутые маршруты (например, см. табл. 9), как правило, не обеспечивающие выполнение дополнительного условия. **Принудительное включение не вошедших в цикл пунктов** является основным содержанием метода расширения цикла. Поскольку на каждом шаге процесса используются **все интервалы цикла**, то можно предполагать и дальновидность решения, принимаемого на каждом шаге процесса.¹

Анализ численных решений, полученных для рассмотренных примеров, приводит к выводу о целесообразности включения в тот или иной интервал цикла не просто очередного индекса $j \in G^t$, а **совместно с некоторыми участками кратчайших маршрутов**, соединяющими этот элемент с границами интервала. Эта идея положена в основу модифицированных методов решения **классической и обобщенной задач коммивояжера**. Указанная идея позволила найти решение важного класса задач коммивояжера для случая, когда матрица расстояний $\|c_{ij}\|$ **не является полной** ($\varphi < 1$). Рассмотренная идея, позволившая модифицировать метод расширения цикла и расширить класс задач, решаемых на его основе, снова приводит к необходимости применения

¹ Процесс «на каждом шаге иди к ближайшему пункту» такой «дальновидностью» не обладает и может привести к грубым ошибкам [12].

эстафетного метода как одного из важных этапов решения задач коммивояжера.

Выдвигается предположение: решение задачи коммивояжера – это **некоторое соединение участков кратчайших маршрутов, удовлетворяющих заданному требованию**. Когда это требование заключается в минимизации **длины цикла** или **величины энергозатрат**, существуют достаточно эффективные методы.

Практический интерес может представлять случай, когда задача состоит в построении гамильтонова цикла, обеспечивающего **минимальное время доставки грузов**, при условии, что скорость передвижения транспортного средства меняется по некоторому закону в зависимости от степени его загрузки α ($0 < \alpha < 1$). Решение такой задачи пока неизвестно и для случая линейной зависимости скорости движения по участку $\langle i, j \rangle$ от степени загрузки α

$$V_{ij}(\alpha) = (V_{ij}^{\min} - V_{ij})\alpha + V_{ij},$$

где V_{ij}^{\min} – скорость на участке $\langle i, j \rangle$ при полной загрузке ($\alpha = 1$); V_{ij} – скорость без загрузки ($\alpha = 0$).

Рассмотренные методы позволяют предложить различные подходы при дополнительных условиях: наличие двух и более коммивояжеров; ограничения по грузоподъемности транспортного средства и т.п.

Определение пропускной способности сети методом Форда-Фалкерсона и методом улучшения оценок

В работе [14, с. 549] приведен пример графа сети, который несмотря на малый размер ($n = 4$) при определении пропускной способности сети из пункта A_1 в пункт A_4 методом Форда-Фалкерсона может, в силу специфики метода, потребовать при решении 2 000 000 ($2 \cdot 10^6$) итераций. Данный пример представлен в графическом и матричном виде на рис. 1.

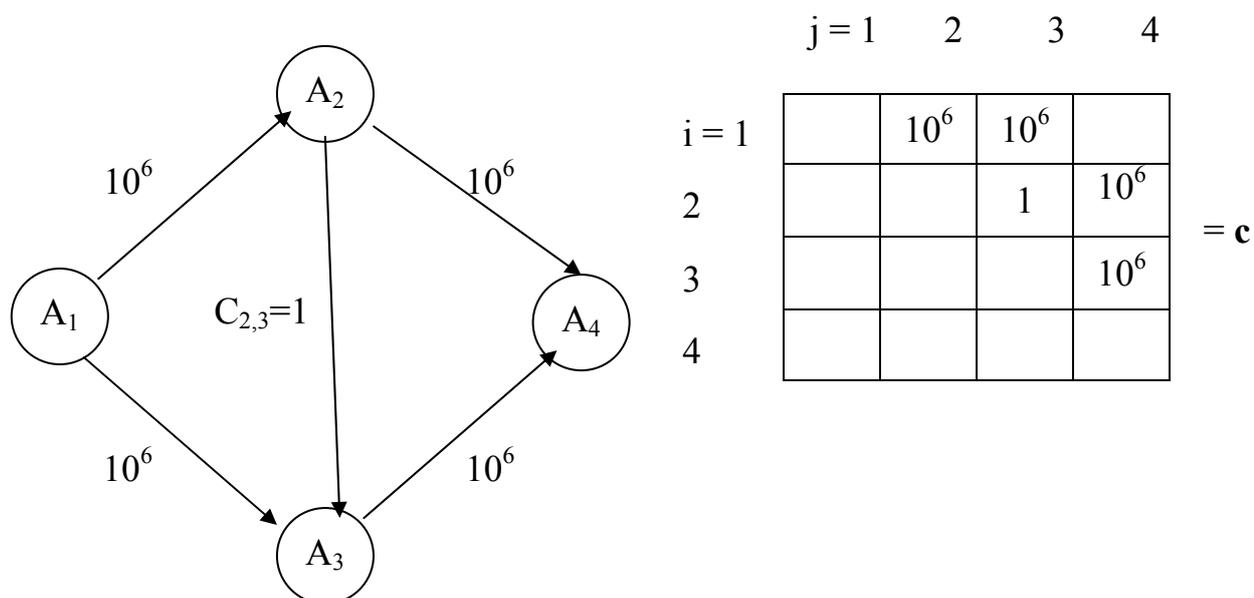


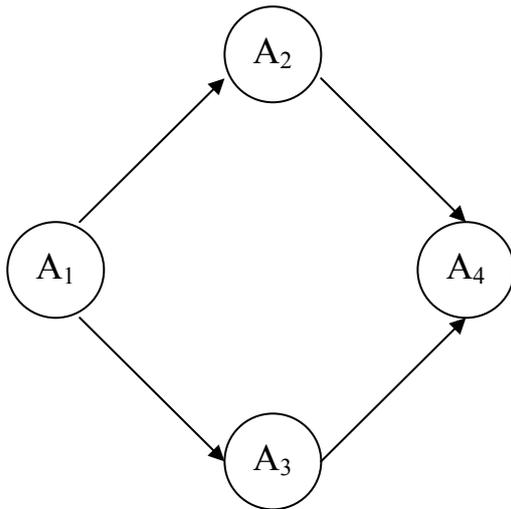
Рис. 1. Представление графа сети

В [14] подробно рассматривается данный пример. Столь низкая вычислительная эффективность обусловлена той особенностью метода, что в ходе решения предусматривается возможность манипуляций с отрицательными плотностями потоков и отрицательными пропускными способностями. Получим решение данного примера методом улучшения оценок (раздел 6).

Согласно 2° алгоритма (рис. 6) имеем начальную оценку сверху искомой пропускной способности оптимального маршрута

$$\pi_{1,4}^1 = \min \{10^6; 10^6\} = 10^6.$$

По начальной оценке $\pi_{1,4}^1$ (в матрице c игнорируется только элемент $c_{2,3}=1$) строятся маршруты из пункта A_1 в пункт A_4 :



$$\Rightarrow \begin{cases} \mu_{1,4} = \langle 1, 2, 4 \rangle, \pi_{1,4}^0 = 10^6, \\ \mu_{1,4} = \langle 1, 3, 4 \rangle, \pi_{1,4}^0 = 10^6. \end{cases} \quad (1)$$

Так как оба полученных оптимальных маршрута независимы (не имеют общих дуг), то они и составят пропускную способность сети

$$\pi_{1,4}^{0\Sigma} = \pi_{1,4}^0 + \pi_{1,4}^{0'} = 10^6 + 10^6 = 2 \cdot 10^6.$$

В остаточной матрице согласно 5° (рис. 7) только один значащий элемент – $c_{2,3} = 1$, что исключает возможность дальнейшего увеличения пропускной способности сети (рис. 7, 6°).

| | | | | | |
|-------|-------|---|--------|--------|------------------|
| | j = 1 | 2 | 3 | 4 | |
| i = 1 | | 0 | 10^6 | | |
| 2 | | | 1 | 0 | = \mathbf{c}^2 |
| 3 | | | | 10^6 | |
| 4 | | | | | |

Если на первой итерации из двух полученных маршрутов (1) выбрать один (например, $\mu_{1,4}$), то на основе полученной остаточной матрицы \mathbf{c}^2 (рис. 7, 5°) в ходе второй итерации будет получен второй маршрут $\mu_{1,4}$ (1), что и завершит получение решения.

Решение задачи коммивояжера размера 10 x 10 модифицированным методом расширения цикла

Матрица расстояний c (табл. 1) данного числового примера заимствована из [17], где приведено и оптимальное решение, полученное одним из известных методов:

$$\mu_1^0 = \langle 1, 3, 7, 10, 8, 6, 2, 5, 4, 9, 1 \rangle, \quad (\mu_1^0) = 1159. \quad (1)$$

Знание оптимального решения позволяет убедиться в том, что и для более общих условий (элементы c_{ij} равномерно распределены в диапазоне 0 – 1000) модифицированный МРЦ (раздел 3) с заданной достоверностью обеспечивает получение оптимального решения.

Для проведения расчетов без использования ЭВМ эстафетным методом (рис. 2) вычислены элементы совмещенной матрицы кратчайших маршрутов и их длин $\|\mu_{k,l}^0 / L_{k,l}^0\|$ (табл. 2). Покажем, что и для рассматриваемого примера существует хотя бы один начальный цикл $\langle k \cdot \gamma \cdot k \rangle$, приводящий к оптимальному решению при использовании МРЦ (табл. 12) или ММРЦ (табл. 15). Из $C_{10}^2 = 45$ возможных начальных циклов по крайней мере цикл

$$\mu_3^1 = \langle 3 \cdot 5 \cdot 3 \rangle = \langle 3, 6, 5, 4, 1, 3 \rangle, \quad L \langle 3 \cdot 5 \cdot 3 \rangle = 763,$$

полученный согласно (3.7) и табл. 2, приводит к оптимальному решению, что видно из результатов расчетов, данных в табл. 3.

На первом шаге процесса (табл. 3, $t = 1$), в интервал r с границами j^{r-1} , j^r последовательно включается каждый элемент $\gamma \in G^1$ и вычисляются соответствующие приращения длины цикла:

$$\delta^t(r, \gamma) = \delta_{j^{r-1} \square \gamma \square j^r}^t = L^t(\mu_{j^{r-1}, \gamma}^0) + L^t(\mu_{\gamma, j^r}^0) - c_{j^{r-1}, j^r}.$$

Например, для $r = 1$, $(j^0; j^1) = (3; 6)$ и $\gamma = 7$ имеем

$$\delta^1(1; 7) = L^1(\mu_{3,7}^0) + L^1(\mu_{7,6}^0) - c_{3,6} = 141 + 422 - 200 = 363, \quad (2)$$

при этом

$$\mu_{3,7-6}^0 = \mu_{3,7}^0 \cup \mu_{7,6}^0 = \langle 3, 7, 5, 4, 9, 6 \rangle,$$

что и записано в первой строке табл. 3.

Из (2) видно, что совместно с включенным в интервал (3;6) номером $\gamma = 7$ вошел также номер $j = 9$, т.е. вошло два *активных* (не включенных ранее) номера: $n^1(1;7) = 2$, $\{\gamma_1\} = \{7;9\}$ (табл. 3, строка 1). Далее вычисляется удельный прирост длины цикла (3.9):

$$\varepsilon^t(r, \gamma) = \delta^t(r, \gamma) / n^t(r, \gamma), \quad \varepsilon^1(1;7) = 363/2 = 181.$$

Вычисление приращений (2) соответствует пункту 4^0 метода расширения цикла (рис. 3). Структура алгоритма остается такой же и для модифицированного МРЦ, если учесть, что дополнительно в 4^0 следует вычислить и величину $\varepsilon^t(r, \gamma)$. В строках 2 – 24 (табл. 3) записаны те же величины для других сочетаний r и γ .

Минимальному значению ε^1 соответствует включение элемента $\gamma_1 = 9$ в интервал $r_1 = 5$ ($\varepsilon^1(5;9) = 15$), (рис. 3, 5^0). Далее выполняется пересчет (6^0) текущих величин, новые значения которых записаны в строке 25 табл. 3. Если еще не все индексы $\gamma \in G^t$ включены в цикл (-8^0 , т.е. $G^{t+1} \neq \emptyset$), то итерация повторяется ($t = 2$). Исходная информация записана в строке 25 и снова выполняются 3 – 6^0 . В рассматриваемом примере величины $\delta^{t+1}(r, \gamma)$ изменятся только для интервалов, смежных с включенным номером $\gamma_1 = 9$ (в строке 25 включенный элемент выделен жирным шрифтом). В строках 26 – 31 записаны результаты для новых интервалов ($\{r\} = \{5;6\}$). Для неизменившихся интервалов используется ранее полученная информация, скорректированная в связи с исключением элемента $j_1 = 9$ из правого столбца табл. 3. Исключение индекса $j = 9$ из правого столбца приведет к исключению строк 3, 7, 11, 15, 19, 23. Элементы $\varepsilon^1(r, \gamma)$ в строках 1, 14, 16, 18, 20 увеличатся в связи с уменьшением значения $n^{t+1}(r, \gamma) < n^t(r, \gamma)$. Новые значения удельных приращений находятся по рекуррентной формуле

$$\varepsilon^{t+1}(r, \gamma) = \varepsilon^t(r, \gamma) \frac{n^t(r, \gamma)}{n^{t+1}}.$$

При выполнении 5^0 (вместо δ^2 используется ε^7) на шаге $t = 2$ минимальным оказывается элемент $\varepsilon^2(1;10) = 127$, при этом в интервал $r = 1$, (3;6) войдут все оставшиеся элементы (табл. 3, строка 4), и процесс построения цикла при данном начальном цикле ($k = 3$) закончится. В строке 32 записано полученное решение. Это решение сравнивается с предыдущим, и если оно дает худший результат ($+9^0$), то формируется новый начальный цикл (10^0) и т.д., до получения совпадающего решения ($+11^0$), что и является условием окончания процесса. Учитывая

инвариантность цикла к исходному пункту коммивояжера (подраздел 3.4), полученное решение может быть приведено к виду (1).

В наихудшем случае (рассчитывается C_n^2 вариантов с различными начальными циклами) оценка требуемого объема элементарных операций увеличится от полинома третьей степени до пятой ($C_n^2 < 0,5n^2$). Однако универсальность модифицированного МРЦ (возможность решения при $\varphi \neq 1$) в значительной мере компенсирует этот недостаток, не представляющий, впрочем, серьезных трудностей для современных ЭВМ.

Таблица 1. $c = \|c_{ij}\|$, $\varphi = 1$

| | $j = 1$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---------|---------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $i = 1$ | 0 | 921 | 56 | 977 | 34 | 11 | 45 | 56 | 101 | 157 |
| 2 | 259 | 0 | 416 | 675 | 91 | 766 | 857 | 622 | 479 | 101 |
| 3 | 580 | 680 | 0 | 260 | 940 | 200 | 141 | 341 | 482 | 822 |
| 4 | 303 | 125 | 428 | 0 | 554 | 982 | 536 | 518 | 54 | 572 |
| 5 | 625 | 197 | 822 | 19 | 0 | 842 | 861 | 702 | 563 | 265 |
| 6 | 829 | 94 | 923 | 17 | 940 | 0 | 957 | 896 | 853 | 749 |
| 7 | 601 | 350 | 952 | 302 | 253 | 555 | 0 | 808 | 363 | 172 |
| 8 | 535 | 707 | 242 | 948 | 190 | 139 | 329 | 0 | 468 | 797 |
| 9 | 264 | 61 | 325 | 386 | 711 | 96 | 807 | 903 | 0 | 710 |
| 10 | 614 | 324 | 938 | 263 | 201 | 464 | 665 | 129 | 794 | 0 |

Таблица 2. $\|\mu_{ij}^0/L_{ij}^0\|$

| | j = 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|-------|------------------------|-----------------------|------------------------|----------------------|-----------------------|-------------------------|-----------------------|----------------------------|------------------------|--------------------------|
| i = 1 | $\frac{1,1}{0}$ | $\frac{1,6,2}{105}$ | $\frac{1,3}{56}$ | $\frac{1,6,4}{28}$ | $\frac{1,5}{34}$ | $\frac{1,6}{11}$ | $\frac{1,7}{45}$ | $\frac{1,8}{56}$ | $\frac{1,6,4,9}{82}$ | $\frac{1,10}{157}$ |
| 2 | $\frac{2,1}{259}$ | $\frac{2,2}{0}$ | $\frac{2,1,3}{315}$ | $\frac{2,5,4}{110}$ | $\frac{2,5}{91}$ | $\frac{2,5,4,9,6}{260}$ | $\frac{2,1,7}{304}$ | $\frac{2,10,8}{230}$ | $\frac{2,5,4,9}{164}$ | $\frac{2,10}{101}$ |
| 3 | $\frac{3,6,4,1}{520}$ | $\frac{3,6,2}{294}$ | $\frac{3,3}{0}$ | $\frac{3,6,4}{217}$ | $\frac{3,6,2,5}{385}$ | $\frac{3,6}{200}$ | $\frac{3,7}{141}$ | $\frac{3,8}{341}$ | $\frac{3,6,4,9}{271}$ | $\frac{3,7,10}{313}$ |
| 4 | $\frac{4,1}{303}$ | $\frac{4,9,2}{115}$ | $\frac{4,1,3}{359}$ | $\frac{4,4}{0}$ | $\frac{4,9,2,5}{206}$ | $\frac{4,9,6}{150}$ | $\frac{4,1,7}{348}$ | $\frac{4,9,2,10,8}{345}$ | $\frac{4,9}{54}$ | $\frac{4,9,2,10}{216}$ |
| 5 | $\frac{5,4,1}{322}$ | $\frac{5,4,9,2}{134}$ | $\frac{5,4,1,3}{378}$ | $\frac{5,4}{19}$ | $\frac{5,5}{0}$ | $\frac{5,4,9,6}{169}$ | $\frac{5,4,1,7}{367}$ | $\frac{5,4,9,2,10,8}{364}$ | $\frac{5,4,9}{73}$ | $\frac{5,4,9,2,10}{235}$ |
| 6 | $\frac{6,4,1}{320}$ | $\frac{6,2}{94}$ | $\frac{6,4,1,3}{376}$ | $\frac{6,4}{17}$ | $\frac{6,2,5}{185}$ | $\frac{6,6}{0}$ | $\frac{6,4,1,7}{365}$ | $\frac{6,2,10,8}{324}$ | $\frac{6,4,9}{71}$ | $\frac{6,2,10}{195}$ |
| 7 | $\frac{7,5,4,1}{575}$ | $\frac{7,2}{350}$ | $\frac{7,10,8,3}{543}$ | $\frac{7,5,4}{272}$ | $\frac{7,5}{253}$ | $\frac{7,5,4,9,6}{422}$ | $\frac{7,7}{0}$ | $\frac{7,10,8}{301}$ | $\frac{7,5,4,9}{326}$ | $\frac{7,10}{172}$ |
| 8 | $\frac{8,6,4,1}{459}$ | $\frac{8,6,2}{233}$ | $\frac{8,3}{242}$ | $\frac{8,6,4}{156}$ | $\frac{8,5}{190}$ | $\frac{8,6}{139}$ | $\frac{8,7}{329}$ | $\frac{8,8}{0}$ | $\frac{8,6,4,9}{210}$ | $\frac{8,6,2,10}{334}$ |
| 9 | $\frac{9,1}{264}$ | $\frac{9,2}{61}$ | $\frac{9,1,3}{320}$ | $\frac{9,6,4}{113}$ | $\frac{9,2,5}{152}$ | $\frac{9,6}{96}$ | $\frac{9,1,7}{309}$ | $\frac{9,2,10,8}{291}$ | $\frac{9,9}{0}$ | $\frac{9,2,10}{162}$ |
| 10 | $\frac{10,5,4,1}{523}$ | $\frac{10,2}{324}$ | $\frac{10,8,3}{371}$ | $\frac{10,5,4}{220}$ | $\frac{10,5}{201}$ | $\frac{10,8,6}{268}$ | $\frac{10,8,7}{458}$ | $\frac{10,8}{129}$ | $\frac{10,5,4,9}{274}$ | $\frac{10,10}{0}$ |

Таблица 3

| t=1: $L^1 \langle 3, 6, 2, 5, 4, 1, 3 \rangle = 763, \quad G^1 = \{7, 8, 9, 10\}$ | | | | | | | | |
|---|--|----------|----------------|----------------------------------|-----------------------|-------|-----------------|----------------|
| № | r | γ | j^{r-1}, j^r | $j^{r-1} \cdot \gamma \cdot j^r$ | $\delta^t(r, \gamma)$ | n^t | ε^t | $\{\gamma_t\}$ |
| 1 | 1 | 7 | 3;6 | 3,7,5,4,9,6 | 141+422-200=363 | 2 | 181 | 7,9 |
| 2 | 1 | 8 | 3;6 | 3,8,6 | 341+139-200=280 | 1 | 280 | 8 |
| 3 | 1 | 9 | 3;6 | 3,6,4,9,6 | 271+96-200=167 | 1 | 167 | 9 |
| 4 | 1 | 10 | 3;6 | 3,7,10,8,6 | 313+268-200=381 | 3 | 127 | 7,8,10 |
| 5 | 2 | 7 | 6;2 | 6,4,1,7,2 | 365+350-94=621 | 1 | 621 | 7 |
| 6 | 2 | 8 | 6;2 | 6,2,10,8,6,2 | 324+233-94=463 | 2 | 231 | 8,10 |
| 7 | 2 | 9 | 6;2 | 6,4,9,2 | 71+61-94=38 | 1 | 38 | 9 |
| 8 | 2 | 10 | 6;2 | 6,2,10,2 | 195+324-94=425 | 1 | 425 | 10 |
| 9 | 3 | 7 | 2;5 | 2,1,7,5 | 304+253-91=466 | 1 | 466 | 7 |
| 10 | 3 | 8 | 2;5 | 2,10,8,5 | 230+190-91=329 | 2 | 164 | 8,10 |
| 11 | 3 | 9 | 2;5 | 2,5,4,9,2,5 | 164+152-91=225 | 1 | 225 | 9 |
| 12 | 3 | 10 | 2;5 | 2,10,5 | 101+201-91=211 | 1 | 211 | 10 |
| 13 | 4 | 7 | 5;4 | 5,4,1,7,5,4 | 367+272-19=620 | 1 | 620 | 7 |
| 14 | 4 | 8 | 5;4 | 5,4,9,2,10,8,6,4 | 364+156-19=501 | 3 | 167 | 8,9,10 |
| 15 | 4 | 9 | 5;4 | 5,4,9,6,4 | 73+113-19=167 | 1 | 167 | 9 |
| 16 | 4 | 10 | 5;4 | 5,4,9,2,10,5,4 | 235+220-19=436 | 2 | 218 | 9,10 |
| 17 | 5 | 7 | 4;1 | 4,1,7,5,4,1 | 348+575-303=620 | 1 | 620 | 7 |
| 18 | 5 | 8 | 4;1 | 4,9,2,10,8,6,4,1 | 345+459-303=501 | 3 | 167 | 8,9,10 |
| 19 | 5 | 9 | 4;1 | 4,9,1 | 54+265-303=15 | 1 | 15 | 9 |
| 20 | 5 | 10 | 4;1 | 4,9,2,10,5,4,1 | 216+523-303=436 | 2 | 218 | 9,10 |
| 21 | 6 | 7 | 1;3 | 1,7,10,8,3 | 45+543-56=532 | 3 | 177 | 7,8,10 |
| 22 | 6 | 8 | 1;3 | 1,8,3 | 56+242-56=242 | 1 | 242 | 8 |
| 23 | 6 | 9 | 1;3 | 1,6,4,9,1,3 | 82+320-56=346 | 1 | 346 | 9 |
| 24 | 6 | 10 | 1;3 | 1,10,8,3 | 157+371-56=472 | 2 | 236 | 8,10 |
| 25 | t=2: $L^2 \langle 3, 6, 2, 5, 4, 9, 1, 3 \rangle = 778, \quad G^2 = \{7, 8, 10\}$ | | | | | | | |
| 26 | 5 | 7 | 4;9 | 4,1,7,5,4,9 | 348+326-54=620 | 1 | 620 | 7 |
| 27 | 5 | 8 | 4;9 | 4,9,2,10,8,6,4,9 | 345+210-54=501 | 2 | 250 | 8,10 |
| 28 | 5 | 10 | 4;9 | 4,9,2,10,5,4,9 | 216+274-54=436 | 1 | 436 | 10 |
| 29 | 6 | 7 | 9;1 | 9,1,7,5,4,1 | 309+575-264=620 | 1 | 620 | 7 |
| 30 | 6 | 8 | 9;1 | 9,2,10,8,6,4,1 | 291+459-264=486 | 2 | 243 | 8,10 |
| 31 | 6 | 10 | 9;1 | 9,2,10,5,4,1 | 162+523-264=421 | 1 | 421 | 10 |
| 32 | $\mu_3^0 = \langle 3, 7, 10, 8, 6, 2, 5, 4, 9, 1, 3 \rangle, \quad L(\mu_3^0) = 778 + 381 = 1159, \quad G^3 = \emptyset$ | | | | | | | |

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Берж К. Теория графов и её применение. – М.: ИИЛ, 1962. – 316 с.
2. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978.
3. Смирнов Д.В. Методы повышения эффективности функционирования систем передачи данных: Дис. ... канд. техн. наук. – Тверь: ТГТУ, 2001. – 156 с.
4. Ford L.R., Fulkerson D.R. Solving the Transportation Problem. – Santa Monica, 1956.
5. Вагнер Г. Основы исследования операций: Т. 1 / Пер. с англ. – М.: Мир, 1972. – 335 с.
6. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Построение сетей интегрального обслуживания. – Л.: Машиностроение, 1990. – 330 с.
7. Майника Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. – М.: Мир, 1981.
8. Васильев Н.С. Математическое моделирование в задачах маршрутизации СПД (многокритериальный подход): Дис. ... док. физ.-мат. наук. – М.: ИВВС; РАН, 1999. – 231 с.
9. Пойа Д. Математическое открытие: Пер. с англ. – М.: Наука, 1970. – 452 с.
10. Берзин Е.А. Оптимальное распределение ресурсов и элементы синтеза систем. – М.: Сов. радио, 1974. – 303 с.
11. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1977. – 479 с.
12. Основы теории оптимального управления / Под ред. В.Ф. Кротова. – М.: Высшая школа, 1990. – 430 с.
13. Немировский А.С., Юдин Д.Б. Сложность задач и эффективность методов оптимизации. – М.: Наука, 1979. – 389 с.
14. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. – М.: МЦНМО, 2002. – 960 с.
15. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. – М.: Машиностроение, 1979. – 431 с.
16. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями. – М.: Мир, 1979. – 600 с.
17. Сигал И.Х. Алгоритм решения задачи коммивояжера с оценкой точности // Алгоритмы и алгоритмические языки. – 1973. – Вып. 6. – С. 49 – 61.
18. Берзин Е.А. Оптимальное распределение ресурсов и теория игр. – М.: Радио и связь, 1983. – 183 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--|-----------|
| ПРЕДИСЛОВИЕ | 6 |
| ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ | 7 |
| ВВЕДЕНИЕ | 8 |
| 1. НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ..... | 10 |
| 1.1. Основные понятия и определения..... | 10 |
| 2. ЗАДАЧА О КРАТЧАЙШЕМ ПУТИ НА ГРАФЕ | 13 |
| 2.1. Постановка задачи..... | 13 |
| 2.2. Эстафетный метод построения кратчайшего пути на графе | 14 |
| 2.3. Алгоритм эстафетного метода (ЭМ)..... | 21 |
| 2.4. Оценка эффективности алгоритма..... | 25 |
| Выводы | 27 |
| 3. КЛАССИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА И ЕЕ РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ РАСШИРЕНИЯ ЦИКЛА..... | 28 |
| 3.1. Постановка классической задачи коммивояжера ($\varphi = 1$)..... | 28 |
| 3.2. Метод расширения цикла, алгоритм, пример вычисления и эффективность алгоритма ... | 30 |
| 3.3. Модифицированный метод расширения цикла, примеры вычислений и эффективность метода..... | 38 |
| Выводы | 45 |
| 4. ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА | 47 |
| 4.1. Постановка обобщенной задачи коммивояжера..... | 47 |
| 4.2. Алгоритм решения обобщенной задачи коммивояжера методом расширения цикла при полной матрице расстояний ($\varphi = 1$) и пример расчёта..... | 48 |
| 4.3. Модифицированный метод расширения цикла и решение обобщенной задачи коммивояжера..... | 55 |
| 4.4. Решение обобщенной задачи коммивояжера методом последовательного наращивания цикла | 61 |
| Выводы | 74 |
| 5. СРАВНИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА РАССМОТРЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОММИВОЯЖЕРА..... | 75 |
| 5.1. Решение тестового примера задачи коммивояжера методом расширения цикла..... | 75 |
| 5.2. Решение тестового примера задачи коммивояжера модифицированным методом расширения цикла..... | 79 |
| 5.3. Решение тестового примера задачи коммивояжера комбинированным методом расширения цикла..... | 82 |
| 5.4. Решение тестового примера задачи коммивояжера методом последовательного наращивания цикла | 82 |
| 5.5. Решение тестового примера обобщенной задачи коммивояжера методом последовательного наращивания цикла | 85 |
| 5.6. Решение тестового примера обобщенной задачи коммивояжера методом расширения цикла..... | 87 |
| 5.7. Решение тестового примера обобщенной задачи коммивояжера модифицированным методом расширения цикла..... | 88 |
| Выводы | 93 |
| 6. ПРОПУСКНАЯ СПОСОБНОСТЬ СЕТИ..... | 93 |
| 6.1. Построение маршрута с максимальной пропускной способностью методом улучшения оценок | 93 |
| 6.2. Определение максимальной пропускной способности сети | 99 |
| Выводы | 107 |

| | |
|---|------------|
| 7. ПОИСК ОСОБЫХ ТОЧЕК НА ГРАФЕ | 108 |
| 7.1. Поиск точек с минимальной суммарной длиной маршрутов..... | 108 |
| 7.2. Учет грузопотоков и грузоподъемности транспортных средств при размещении баз..... | 116 |
| 7.3. Поиск минимаксных точек на графе | 120 |
| Выводы | 127 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ | 127 |
| Приложение 1. Определение пропускной способности сети методом Форда-Фалкерсона и методом улучшения оценок..... | 130 |
| Приложение 2. Решение задачи коммивояжера размера 10 x 10 модифицированным методом расширения цикла | 132 |
| БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК..... | 137 |

Евгений Александрович Берзин

**ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ РЕШЕНИЯ
НЕЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЗАДАЧ НА ГРАФАХ**

Учебное пособие

Редактор Е.В. Маняшина
Корректор Т.С. Сеницына
Технический редактор Г.В. Комарова

Подписано в печать 28.01.05

Формат 60 x 84 / 16

Физ. печ. л. 8,5

Тираж 100 экз.

Усл.-печ. л. 7,9

Заказ № 13

Бумага писчая

Уч.-изд. л. 7,4

Цена 78 руб. 70 коп.

Издательство ТГТУ